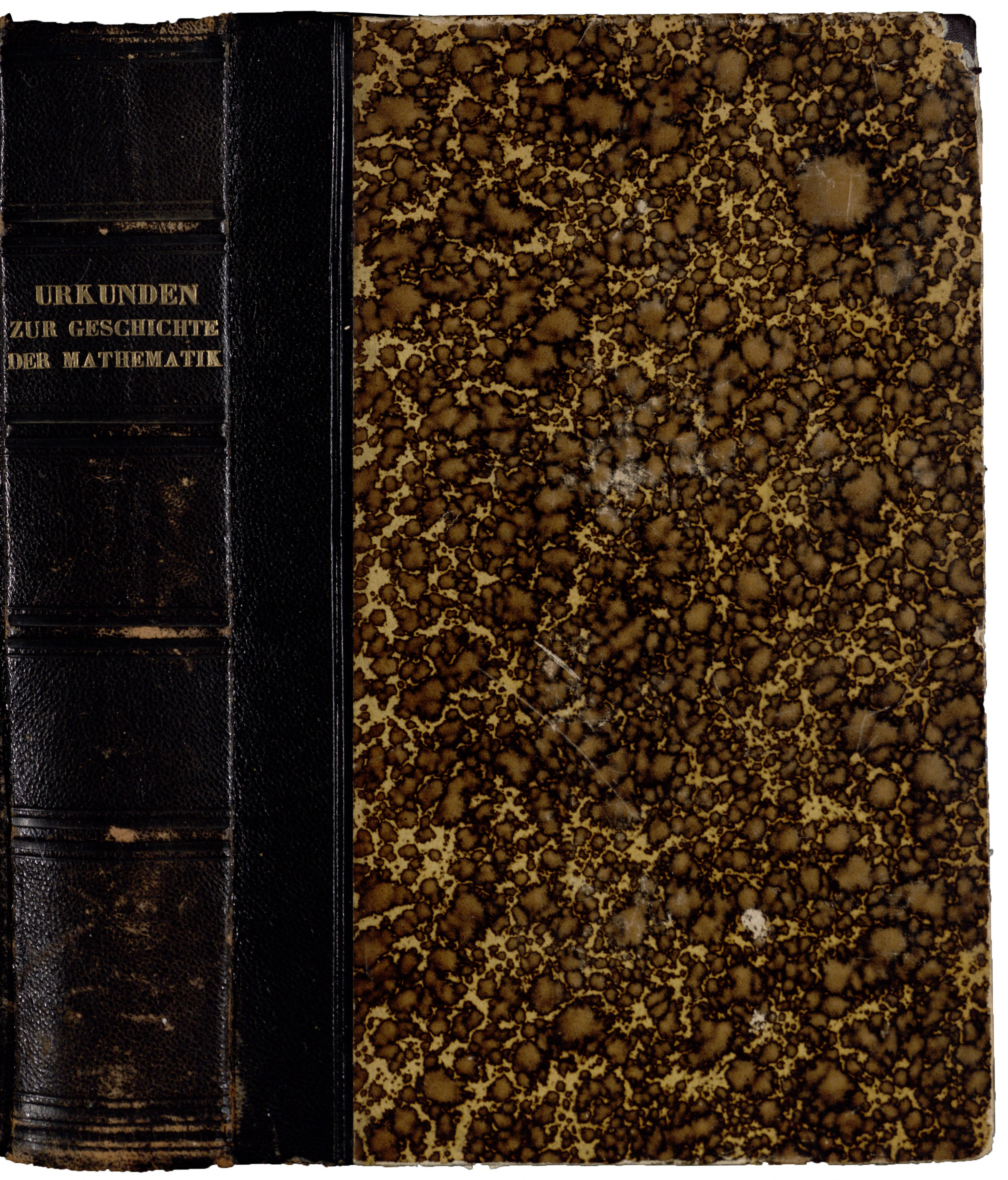
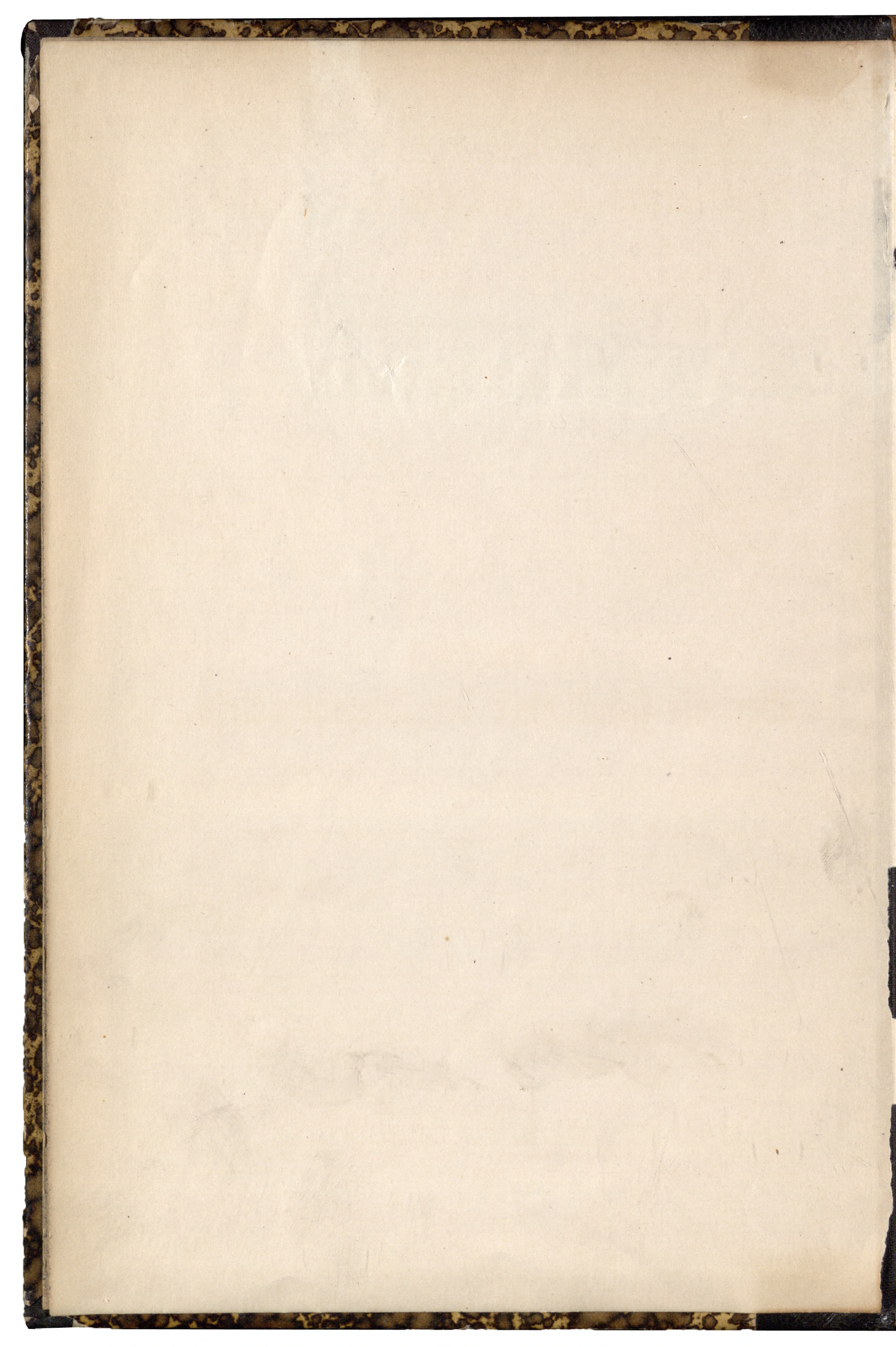

URKUNDEN
ZUR GESCHICHTE
DER MATHEMATIK



Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik

von

Moritz Cantor.

In 3 Bänden.

I. Band. Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr.

Mit 114 Figuren im Text und 1 lithogr. Tafel.

2., verbesserte und vermehrte Auflage.

[VIII u. 883 S.] gr. 8. 1894. geh. n. ℳ 22.—; in Halbfrz. geb. ℳ 24.—

II. Band. Vom Jahre 1200 bis zum Jahre 1668.

Mit 190 Figuren im Text.

2., verbesserte und vermehrte Auflage.

[XII u. 943 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 26.—; in Halbfrz. geb. ℳ 28.—

Erschien in 2 Teilen:
I. Teil. [480 S.] 1899. n. ℳ 14.—
II. Teil. [XII u. S. 481—943.] 1900. n. ℳ 12.—

III. Band. Vom Jahre 1668 bis zum Jahre 1758.

2., verbesserte und vermehrte Auflage.

In 3 Abteilungen. Mit 146 Figuren im Text.

[X u. 923 S.] gr. 8. 1901. geh. ℳ 25.—; in Halbfrz. geb. n. ℳ 27.—

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, daſs das Werk Cantors von eingehendster Sachkenntnis zeugt und durch meisterhafte Darstellung sich auszeichnet. **(Monatshefte für Math. und Phys. 1901. Nr. 1.)**

Die zahlreichen, bis in die jüngste Zeit reichenden Litteraturnachweise werden ganz besonders willkommen sein. Nach dem Gesagten ist es beinahe überflüssig, die neue Auflage des groſsartig angelegten Geschichtswerkes noch allen Fachgenossen aufs wärmste zu empfehlen.
(Zeitschrift für das Realschulwesen. 24. Jahrg. Heft 12.)

Mit Freuden geben wir von dem Fortgang der 2. Auflage des schönen und gediegenen Werkes Kunde, das nicht nur für den Mathematiker, sondern in einem weiteren Kreise Interesse finden muſs. —
(Naturwissenschaftliche Wochenschrift. XIV. Nr. 33.)

ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.
BEGRÜNDET VON MORITZ CANTOR. XII. HEFT.

URKUNDEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATIK IM MITTELALTER UND DER RENAISSANCE.

HERAUSGEGEBEN VON

MAXIMILIAN CURTZE.

IN ZWEI THEILEN. ERSTER THEIL.

MIT 127 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1902.


PAŃSTW. INSTYTUT MAT.
BIBLIOTEKA

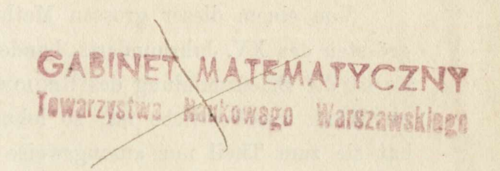
MORITZ CANTOR

ZU SEINEM GOLDENEN DOKTORJUBILÄUM

IN TREUER FREUNDSCHAFT UND LIEBE

DARGEBRACHT VOM

HERAUSGEBER.



Mein lieber Freund!

An Deinem Ehrentage wäre ich gern mit einem andern Stoffe Dir entgegengetreten. Da aber die nöthigen Vorarbeiten bis dahin sich nicht bewältigen liessen, so habe ich es vorgezogen mit diesem Strausse wichtiger Quellenwerke zur Geschichte unserer Wissenschaft vor Dir zu erscheinen, um nicht mit ganz leeren Händen zu Dir zu kommen. Das Werk SAVASORDA'S wirft, wie Du ja selbst sehen wirst, ein helles Licht auf die Quellen der *Practica Geometriae* des LEONARDO PISANO, zeigt aber für diesen auch, dass sein Wissen und Können doch hoch über dem seines Vorgängers stand.

Man wird mir auch hier wieder, wie bei meiner Veröffentlichung des *Buches der drei Brüder,* jenes zweiten Quellenwerkes LEONARDO'S, den Vorwurf nicht ersparen, ich hätte, wie dort das arabische, hier das hebräische Original zu Rathe ziehen sollen. Wenn es sich darum handelte, die Stelle sowohl der drei Brüder in der arabischen Litteratur als die SAVASORDA'S in der hebräischen festzulegen, so würde ich der erste sein, das anzuerkennen, dann aber die Herausgabe Berufeneren überlassen. Nun steht doch aber fest, dass die Schriftsteller des Mittelalters, so speciell LEONARDO VON PISA, sich der Übersetzungen des GHERARDO CREMONESE und PLATO'S VON TIVOLI bedient haben: will man also die Schriften jener Semiten für die Erklärung und Beurtheilung der mittelalterlichen Mathematiker zu benutzen in der Lage sein, so haben für diesen Zweck die lateinischen Übersetzungen, so schwerfällig und vielleicht so fehlerhaft sie sein mögen, doch einen bei weitem grösseren Werth als die Originale. Wäre dieser Grundtext damals nicht übersetzt worden, so hätten sie eben auf die Kenntnis des Mittelalters gar keinen Einfluss üben können, wie wir das ja an so vielen hochwerthvollen Werken der Araber sehen, die auch heute nur noch im Urtexte vorhanden sind. Selbst solche vollendeten Arbeiten, wie die Abhandlung über Trigonometrie des NASSÎR ED-DÎN, sind spurlos für die Entwickelung der Mathematik im Abendlande verloren gewesen, und ihre Ergebnisse mussten von den grossen Mathematikern des ausgehenden Mittelalters selbstständig neu gefunden werden.

Von einem dieser grossen Mathematiker, in seiner Art vielleicht dem grössten des XV. Jahrhunderts, handelt das an zweiter Stelle stehende Stück. Es ist die Briefsammlung des Regiomontan. Obwohl sie schon einmal durch de Murr veröffentlicht ist, so lohnt es doch, sie zu erneuern. de Murr hat sie zum Theil nur auszugsweise abgedruckt, hat aber zugleich das für die Erkenntniss des wirklichen Rechnens in dem Manuscripte enthaltene Material einfach weggelassen. Es dürfte nur sehr wenig Beispiele geben, welche in solcher Vollständigkeit der Berechnung und Darlegung des Gedankenganges aus jener Zeit sich bis auf uns erhalten haben, als diejenigen Regiomontan's.

An dritter Stelle wird sich im zweiten Theile, der als Heft XIII der „Abhandlungen" erscheinen wird, die Arbeit eines Italieners, des Leonardo Mainardi von Cremona, anreihen, mit dem Titel *Practica Geometriae.* Sie behandelt Feldmessung in ähnlichem Umfange wie Dominicus de Clavasio. Interessant ist die genaue Darlegung der *Umbra recta* und *versa* genannten goniometrischen Funktionen und die Berechnung des schiefabgeschnittenen Prisma. Die Arbeit stammt aus 1488.

Den Schluss endlich wird die Algebra bilden, welche als die Arbeit des Initius Algebras ad Ylem *Geometram, magistrum suum* bezeichnet wird, und nicht blos durch die wunderliche Benutzung und das Durcheinanderwerfen der Männer der verschiedensten Zeitalter merkwürdig ist, sondern ihren Verfasser, und das ist ein Deutscher, als einen wohl bewanderten Arithmetiker und Algebraiker zeigt, der einem Scheubel und Stiefel wohl an die Seite gestellt werden darf.

Du wirst ja selbst sehen, wie Vieles Dir die hier veröffentlichten Arbeiten bei einer Neubearbeitung der ersten beiden Bände Deiner Vorlesungen bringen werden, und so will ich denn hier, mein lieber Cantor, dieser Gratulationsepistel ein Ziel setzen, mit dem innigen Wunsche, Du mögest auch in dem heute angehenden zweiten Halbjahrhundert Deiner Doktorwürde mir Deine erprobte Freundschaft und Liebe ungeschwächt bewahren.

Thorn, am 5. Mai 1901.

M. Curtze.

Inhaltsverzeichnis.

Folgende Druckfehler bittet man vor Benutzung des Heftes verbessern zu wollen.

22, 36: 17. — *24,* 25: alternis. — *34,* 19: unumquodque 7. — *78,* 17: latus vero. — *82,* 37: quae sunt. — *110,* 6: eum in 60. — *135,* 24: 4 Ellen. — *136,* 7: lineam *eb*. — 9: lineae *cb*. — 10: totius *af*. — *137,* 7: *eb* gleich. — 8: Linie *cb*. — 9: Linie *fa*. — *141,* 13: von *g* aus. — *144,* 18: itaque *afgc*. — *146,* 20: superficiei. — *148,* 17: lineam *bg*. — *152,* 31: *fg, fa, fc*. — *157,* 13: *fbcg*. — 24: Seite $\widehat{ac}$. — *165,* 18: Prisma. — *172,* 9: Ex quibus. — *173,* 30: Multipliciert man. — *180,* 36: *cefd*. — *181,* 38: *cefd*. — *188,* 2: oberen. — *193,* 17: concludo. — *194,* 28: Stellis fixis. — *198,* 1 v. u.: sin 9°28′. — *210,* 31: apud me. — *215,* 12; arcum *zh*. — *218,* 1 v. u.: vocis. — *222,* 10: quadratum *qv*. — 3 v. u.: 52 · 52. — *228,* 18: 21986. — 21: transiisse. — *238,* 37: facto hac. — *243,* 12: *hq* ad *qx*. — 18: ecliptica. — *246,* 28: *ahgd*. — *247,* 9: rectos. — *250,* 17: invenire. — *251,* 11: ille *zelh*. — 20: tale sit. — *254,* Fig. 28: Der Bogen *hq* muss die Verlängerung von *bh*, nicht von *mh* sein. — *293,* 15: cede, queso,. — *301,* 16: sequenti. — *305,* 29: spectaculo. — *324,* 17: auctores. — *326,* 17: excribrandi. — *328,* 19: tandem. — *331,* 21: constituti — *336,* 26: d. i. 1471.

Namensverzeichnis.

I.

DER „LIBER EMBADORUM“ DES SAVASORDA IN DER ÜBERSETZUNG DES PLATO VON TIVOLI.

Der Liber Embadorum des Abraham bar Chijja Savasorda in der Übersetzung des Plato von Tivoli.

Einleitung.

Der Text der nachfolgenden Ausgabe ist zwei Handschriften der Pariser Nationalbibliothek entnommen, welche mir auf Verwendung des Herrn Ministers der geistlichen pp. Angelegenheiten und durch Vermittelung des Auswärtigen Amtes des Deutschen Reichs von der Direktion genannter Bibliothek zur Benutzung nach Thorn gesendet waren, für welche Liberalität ich allen betheiligten Faktoren hier meinen ergebensten Dank auszusprechen mich beehre.

Die erste dieser Handschriften hat die Bezeichnung *Manuscrit latin 11246,* früher *Supplément latin 774,* unter welcher Bezeichnung sie Libri[1]) anführt. Es ist eine Quarthandschrift von 48 Pergamentblättern, welche mit 5 Vor- und ebensoviel Nachblättern in Papier in einen Band zusammengebunden sind. Libri, a. a. O., setzt sie in das XIII. Jahrhundert, Bubnov in den *Opera Gerberti*[2]) in das XV. Meiner Ansicht nach hat Libri recht. Die Handschrift ist nämlich fast ohne Abkürzungen und so vorzüglich geschrieben, wie sie das XV. Jahrhundert kaum aufzuweisen hat. Der Schreiber, oder vielleicht ein Korrektor, hatte vielerlei Auslassungen theils über der Zeile theils auf den breiten Rändern ergänzt; ein späterer Besitzer hat alle diese Ergänzungen, weshalb ist unbestimmbar, fein säuberlich ausradiert, so dass es nur dem günstigen Umstande, dass im XVI. Jahrhunderte, bevor dieser Vandalismus geschehen war, jemand von dieser selben Handschrift Abschrift genommen hatte, zuzuschreiben ist, dass trotz alledem der vollständige Text erhalten wurde. Unsere Arbeit umfasst Blatt 1—37′.

---

1) Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, II, 480—486.
2) Bubnov, *Opera Gerberti,* Berolini 1898, 302—335.

1*

Auf derselben Rückseite von Blatt 37 beginnt dann eine weitere Abhandlung: *In nomine domini misericordis et miseratoris incipit liber Ersemidis in quadratum(!) circuli.* Es ist das eine von der Übersetzung des Gherardo Cremonese gänzlich abweichende Bearbeitung der *circuli dimensio* des Archimedes.[1]) Sie lässt den ersten Theil der Berechnung durch die eingeschriebenen Vielecke völlig aus. Dies Stück reicht bis Blatt 39. Auf Blatt 39′ bis 47 recto, Zeile 15 folgen weiter Auszüge aus dem zweiten und dritten Buche der Geometrie Gerberts[2]), die dann noch vorhandenen drei Seiten enthalten verschiedene theils geometrische, theils arithmetisch-algebraische Aufgaben, welche Libri, a. a. O., ebenfalls wie alles Vorhergehende Savasorda zugeschrieben hat. Die völlig abweichende Schreibart und Orthographie lassen das jedoch nicht zu. Der Verfasser ist aber jedenfalls ein Italiener gewesen: Ausdrücke wie *„3 et mezo"* und ähnliche beweisen dies schon allein. Am Schlusse muss mindestens ein Blatt verloren gegangen sein, das aber durch den Abschreiber des XVI. Jahrhunderts noch gelesen und copiert wurde.

Diese letztere Abschrift befindet sich in derselben Bibliothek unter der Bezeichnung *Manuscrit latin 7224.* Es ist eine Foliohandschrift auf Papier und umfasst 3 Vor-, 84 bezeichnete und beschriebene Blätter und 3 Nachblätter. Sie ist eine wortgetreue Copie der andern Handschrift und enthält alle darin befindlichen Stücke in demselben Umfange und derselben Reihenfolge, nur dass sie, wie schon gesagt, die in 11246 ausradierten Stellen und das letzte verlorene Blatt noch gelesen und abgeschrieben hat. Dass hin und wieder einmal eine Abkürzung falsch aufgelöst ist, thut dem Werthe derselben keinen Abbruch.

Bei der Festsetzung des Textes habe ich mich, soweit das, ohne unabsichtliche Irrthümer des Schreibers zu übernehmen, möglich war, streng an die Lesarten der ältern Handschrift, die ich mit *A* bezeichne, gehalten. Die durch die jüngere Abschrift, ich nenne sie *B*, erhaltenen Ergänzungen sind durch gebrochene Klammern ⟨ ⟩ gekennzeichnet und unter dem Texte in den Abweichungen der Handschriften ist stets hinzugefügt, ob die betreffende Rasur über der Zeile oder auf dem Rande geschehen ist. Solche Worte, welche in *A* ganz ausgelassen und von dem Korrektor nicht ergänzt waren, die also auch *B* nicht gelesen hat, sind in ebensolche Klammern eingeschlossen, dann aber durch das Wort *„fehlt"* unter dem Texte

1) Wenn also Wüstenfeld, *Übersetzungen Arabischer Werke in das Lateinische,* S. 59—60 des Sonderabdrucks diese Übersetzung mit der Gherardo's identificiert, so irrt er.

2) Bubnov, a. a. O.

als von mir ergänzt bezeichnet worden. Die Figuren sind in beiden Handschriften sehr gut gezeichnet: auch sie habe ich, soweit möglich, nach *A* gegeben; die Paragraphenzahlen habe ich hinzugefügt.

Das Werk SAVASORDA's ist von LEONARDO PISANO bei Abfassung seiner *Practica Geometriae* zum Vorbilde genommen worden. LEONARDO hat die ganze Anlage seiner Arbeit nach dem *Liber Embadorum* gemacht, nur hat er, altem Gebrauche folgend, die Dreiecksrechnung vor der Quadrat- und Rechtecksberechnung abgehandelt, darin ist SAVASORDA folgerichtiger als LEONARDO. In den Anmerkungen habe ich die Gleichungen zwischen beiden Schriftstellern, die sich oftmals bis auf die benutzten Zahlenbeispiele erstrecken, nachgewiesen. LEONARDO hat aber, das ist richtig, mit dem empfangenen Pfunde gewuchert, vieles theils weiter ausgeführt, theils andern Verfassern entnommen, theils aus Eigenem hinzugefügt, so dass seine Geometrie doch hoch über der SAVASORDA's steht.

Über unsern Verfasser selbst setze ich das im Auszuge hier her, was Steinschneider darüber zusammengestellt hat.[1]) Danach lebte ABRAHAM BAR (Sohn des) CHIJJA HA NASI (der Fürst) am Ende des XI. und Anfange des XII. Jahrhunderts meist zu Barcelona und hielt sich nur vorübergehend in der Provence und dem südlichen Frankreich auf. Von hoher Stelle war ihm der Ehrentitel *Sahib al Schorta,* d. h. Oberst der Leibwache, verliehen, der dann von seinem Übersetzer, PLATO VON TIVOLI, in SAVASORDA verdreht wurde. Dieser älteste bekannte Übersetzer mathematischer Werke aus dem Arabischen diente SAVASORDA dabei als Dolmetscher. Von den vielfachen Schriften ABRAHAM's setze ich hier nur den Titel der Urschrift des *Liber Embadorum* her: *Chibbur ha-Meschika we-ha-Tischboreth.* Von diesem hat der Übersetzer die Einleitung sowohl als den Epilog weggelassen. Die Einleitung soll sich an die französischen Juden wenden und ihnen vorwerfen, dass sie die Regeln der Geometrie nicht richtig kennten, und deshalb falsche Rechnungen ausführten. Deshalb habe er das Werk zu ihrem Gebrauche geschrieben. Diese Geometrie ist wahrscheinlich das älteste Werk SAVASORDA's, da nach den Handschriften die Übersetzung am 15. Tage des Monats Saphar im Jahre DX der Araber, d. h. am 30. Juni 1116 beendet ist. Sie geht daher auch allen Übertragungen ATELHARD's VON BATH sowie des GHERARDO CREMONESE voraus.

Die Übersetzung PLATO's findet sich ausser in den beiden Pariser Handschriften, soweit bekannt ist, noch in der Magliabecchiana zu Florenz mit der Bezeichnung: *Scaffale 2, Palchetto IV, No. 36* und *St. Marco 184.* Ebenso soll Graf ISOLANI in Bologna ein Exemplar besitzen. Auch in dem

1) STEINSCHNEIDER in *Bibliotheca Mathematica* 1896, 33 ff.

Catalogus Manuscriptorum Angliae et Hiberniae Vol. II P. II S. 42, No. 697 findet sich aufgeführt SAVASORDAE *Judaei Liber de Areis Hebraice scriptus et a PLATONE TIBURTINO in Latinum translatus anno Arabum DC(!) mense saphar,* wo DC sicherlich nur Schreib- oder Druckfehler ist, da alle übrigen Handschriften DX haben, im Jahre DC auch PLATO VON TIVOLI kaum noch am Leben gewesen wäre. Genauere Notizen über diese Exemplare sehe man bei BONCOMPAGNI, *Delle versioni fatte da PLATONE TIBURTINO traduttore del secolo duodecimo.* Roma 1851, p. 31 u. ff. Wenn dort nach GUILELMINI darauf hingewiesen wird, es seien in Handschriften LEONARDO'S VON PISA Auszüge aus SAVASORDA vorhanden, so sind doch gerade diejenigen Theile, welche dort herangezogen werden, nicht aus dem *Liber Embadorum* genommen, dürften überhaupt nicht von SAVASORDA herrühren. Jedenfalls ist aber beachtenswerth, dass schon so frühzeitig auf Beziehungen zwischen LEONARDO und SAVASORDA hingewiesen ist.

Was WÜSTENFELD in seiner Abhandlung: Übersetzungen Arabischer Werke in das Lateinische, S. 39 des Sonderabzuges von PLATO schreibt, „PLATO, von Tivoli gebürtig, lebte in Spanien, lernte dort das Hebräische und Arabische und übersetzte aus beiden Sprachen mathematische und astronomische Werke ins Lateinische, aber sehr mangelhaft", trifft für den *Liber Embadorum* sicher nicht zu. Wie der Leser sich überzeugen wird, findet sich in demselben kaum ein Fehler in den Deduktionen. Dass man von einem Manne des angehenden XII. Jahrhunderts kein klassisches Latein verlangen kann, ist ja selbstverständlich, aber jeder wird mir zugeben, dass man ohne jede Schwierigkeit der Übersetzung zu folgen im stande ist, und die oftmals vorhandene Schwulst des Stiles ist nicht sowohl Schuld des Übersetzers, sondern muss dem wirklichen Verfasser zur Last gelegt werden.

SAVASORDA hat sein Buch in vier Kapitel getheilt, deren zweites und umfangreichstes wieder in fünf Theile, *partes,* zerfällt. Das erste Buch enthält die Erklärungen, Postulate und Axiome des EUKLIDES, sowie die im VI.—IX. Buche desselben enthaltenen Erklärungen der verschiedenen Zahlenarten, ferner einige der geometrischen Lehrsätze EUKLID'S über Gleichflächigkeit von Dreiecken und Parallelogrammen und die Erklärung der Ähnlichkeit zweier Dreiecke. Schon hieraus wird man die Abhängigkeit LEONARDO'S von seinem Vorbilde erkennen. Seine *Practica Geometriae* beginnt genau in derselben Weise, nur hat er einen oder den andern Satz hinzugefügt und das Gesagte durch Pisaner Maasseinheiten weitläufiger als SAVASORDA erläutert.

Die Einleitung zum zweiten Kapitel und das, was im ersten Theile desselben über die Ausmessung des Quadrates und des Rechteckes gesagt

ist, bilden bei LEONARDO die *Distinctio prima,* freilich in ganz unverhältnismässig weitläufiger Ausführung, dagegen hat seine *Distinctio secunda,* welche Quadratwurzeln zu finden lehrt, bei SAVASORDA kein Äquivalent. Letzterer nimmt eben die Kenntnis der Quadratwurzelausziehung als bekannt an. Der Rest des ersten Theiles von Kapitel 2 bei SAVASORDA lehrt den Inhalt des Rhombus kennen und geht dann über zur Berechnung der Diagonalen der bisher behandelten Vierecke. Dann aber löst er Aufgaben wie: Der Inhalt eines Quadrates (oder eines Rechteckes) minus oder plus der Summe der Seiten ist bekannt, wie gross ist Seite und Inhalt? und umgekehrt: Bekannt ist die Summe der Seiten minus dem Inhalte, wie gross ist Seite und Inhalt? Es sind das die Lösungen der Gleichungen zweiten Grades $x^2 + ax = b$; $x^2 = ax + b$; $x^2 + b = ax$, welche in bekannter Art behandelt werden. SAVASORDA weiss dabei, dass die dritte zwei verschiedene Lösungen besitzt, und beweist alle Fälle geometrisch aus den Sätzen des 2. Buches EUKLID's. Parallel dazu ist LEONARDO's *Pars secunda tertiae dictionis,* welcher sämmtliche Fälle SAVASORDA's genau in der von diesem gewählten Reihenfolge und mit denselben Zahlenbeispielen umfasst, dann aber, seiner grossen algebraischen Begabung entsprechend, noch eine grosse Anzahl verwickelterer Beispiele hinzufügt. Es ist also nicht die Übersetzung der Algebra des MUHAMED BEN MÛSA ALCHWÂRIZMÎ durch GHERARDO VON CREMONA, welche zuerst dem Abendlande zeigte, wie man quadratische Gleichungen lösen könnte, sondern der *Liber Embadorum* unseres SAVASORDA, dem dieser Ruhm zufallen muss.

Die *pars secunda secundi capituli* bei SAVASORDA behandelt die Ausmessung der Dreiecke. Das Seitenstück bei LEONARDO ist dessen *pars prima tertiae distinctionis.* Er hat, wie wir schon oben erwähnten, die Dreiecke vor den Quadraten, Rechtecken und Rhomben behandelt. Auch hier behält er Beispiele und Reihenfolge der Sätze bei. Die von SAVASORDA ohne Beweis gegebene Regel der drei Brüder für den Dreiecksinhalt aus den drei Seiten (er sagt nämlich am Schlusse: *Haec quidem in geometriae demonstrationibus est intricata, quapropter tibi leviter explanari posse non existimo*) hat LEONARDO ausführlich mitgetheilt und bewiesen und zwar im Ganzen nach den drei Brüdern.

Im dritten Theile seines zweiten Kapitels behandelt SAVASORDA die Parallelogramme, die Paralleltrapeze, die ihm wie LEONARDO *caput abscissa* heissen, und die allgemeinen Vierecke. Bei LEONARDO, der genau wie SAVASORDA vorgeht, dieselben Ausdrücke, Figuren und Formeln benutzt, findet sich der entsprechende Abschnitt auf Seite 77 bis 83.

Abweichend von LEONARDO lässt SAVASORDA im vierten Theile seines

zweiten Kapitels zunächst die Ausmessung des Kreises und von dessen Theilen folgen. Hier hat LEONARDO aus dem Buche der drei Brüder oder der *Circuli dimensio* ARCHIMED'S, die ihm ja beide vorgelegen haben, sowie dem ebenfalls von GHERARDO CREMONESE übersetzten Almageste des PTOLEMÄUS die Sache ausführlich gegeben, aber Seite 100 bis 102 sind wieder SAVASORDA entnommen bis auf die benutzten Namen der Figuren. Dass aber bei SAVASORDA hier die älteste Sehnentafel in lateinischer Sprache vorhanden ist, habe ich schon in der *Bibliotheca Mathematica* I_3, S. 330 nachgewiesen.

Was im fünften Theile des zweiten Kapitels enthalten ist, die Ausmessung der Polygone, sowie der auf Abhängen oder Bergen befindlichen Flächen, hat LEONARDO auf Seite 83 bis 86, dann aber wieder, völlig mit SAVASORDA übereinstimmend, Seite 108 bis 110 abgehandelt.

Das dritte Kapitel unseres *Liber embadorum* handelt von den bei dem Erbrechte der Araber nothwendigen Aufgaben über Feldertheilung. In letzter Instanz gehen die betreffenden Anweisungen jedenfalls auf das Buch *de divisionibus* EUKLID'S zurück. LEONARDO behandelt sie in seiner *Distinctio quarta*. Er hat sämmtliche Theilungen SAVASORDA'S, aber fügt noch eine grosse Zahl anderer hinzu, welche nicht auf Erbtheilung beruhen, z. B. die Theilung der Figuren von einem innerhalb oder ausserhalb derselben gegebenen Punkte aus. Aber da, wo SAVASORDA drei oder vier verschiedene Fälle unterscheidet, thut dies LEONARDO genau in derselben Weise und bezeichnet die zugehörigen Figuren, wie jener, mit *Figura prima, secunda, tertia* u. s. w.

Das vierte Kapitel SAVASORDA'S, das die Ausmessung der Körper behandelt, hat LEONARDO zwar auch an der auf die Theilung folgenden Stelle, wie jener, er hat sich aber hier ein vollkommeneres Muster genommen. Der ganze Abschnitt ist bei LEONARDO eine theils wörtliche, theils durch Beispiele vermehrte Bearbeitung des *Liber trium fratrum*.

Zum Schlusse zeigt SAVASORDA, wie praktisch auf dem Felde untersucht werden kann, welche Arten von Figuren zur Ausmessung vorliegen, und wie man am leichtesten die zur Berechnung nöthigen Höhen und Seiten zu finden im Stande ist. Auch LEONARDO fügt in seiner *distinctio septima* Feldmesserisches seinem Werke hinzu, nur sind es nicht, wie bei SAVASORDA, Anweisungen zum Flächenmessen, sondern Höhen- und Längenmessungen, die er, zum Theil an die Agrimensoren und die Geometrie GERBERT'S erinnernd, darlegt.

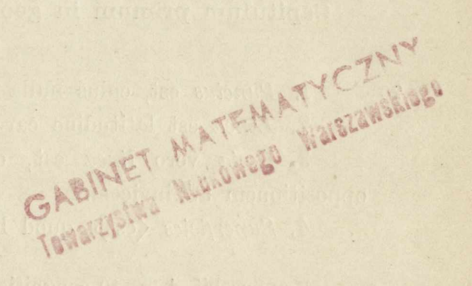
Das ist in Kurzem der Gedankengang des *Liber Embadorum*. Wir sind aber sicher, dass ein genaueres Studium desselben seinem Verfasser,

der ein volles Jahrhundert vor LEONARDO sowohl als vor JORDANUS NEMORARIUS lebte, einen ehrenvollen Platz in der Geschichte der Wissenschaft erobern wird.

Dem lateinischen Texte des Buches ist auf Anregung des Herrn Verlegers eine deutsche Übersetzung gegenübergestellt. Sie dürfte manchem nicht unwillkommen sein.

Thorn, 5. Mai 1901.

M. Curtze.



| *Incipit liber embadorum a* Savasorda 1
in hebraico compositus et a Platone Tiburtino *in latinum sermonem translatus anno Arabum D. X. mense saphar.*

Qui omnes mensurandi dividendique modos recte nosse desiderat, uni-
5 versalia geometriae arithmeticaeque proposita, in quibus mensurandi ac dividendi magisterium fundatur, eum scire necesse est, quibus perfecte cognitis in his peritissimus apparebit, et in nullo unquam deviare poterit. Hunc itaque librum in quatuor capitula partiamus oportet. Quorum primum universalia geometriae et arithmeticae proposita, quibus legentis in-
10 tellectus ad veram cognitionem aperitur, in se continet; secundum autem cognitionem mensurandi agros secundum figuram sibi propriam, triangulatas scilicet et quadratas seu rotundas aut alius formae cuiuslibet; tertium quidem in divisione omnium figurarum, quarum mensurae in secundo capitulo monstrantur; quartum in metiendo foveas et puteos eorumque similia
15 curret, et etiam ea, quae in altum elevantur nec non et sperica atque vasa. Demum, ut haec scientia perfecte in hoc libro contineatur, qualiter hoc operemus, indicabimus et ita librum feliciter terminabimus.

Capitulum primum in geometriae arithmeticaeque universalia proposita.

20 1. *Punctus* est, cuius nulla pars est.

2. *Linea* est latitudine carens longitudo.[1])

3. *Recta* vero *linea* est, quae ponitur super quorumlibet pensatam oppositionem ad invicem.

4. *Superficies* ⟨est⟩, quod longitudine latitudineque tantum continetur.

---

7 apperebit *A*. — 10 congnitionem *und so immer*. — 14 quartum] quantum. — 22 pentotam. — 24 est *fehlt in A und B*.

Hier beginnt der Liber Embadorum von Savasorda in hebräischer Sprache verfasst und von Plato von Tivoli in das Lateinische übertragen im Jahre DC der arabischen Zeitrechnung im Monat Saphar.

Wer alle Arten, wie Flächen zu messen und zu theilen sind, richtig kennen zu lernen wünscht, muss nothwendigerweise die allgemeinen Sätze der Geometrie und Arithmetik inne haben, auf welchen die Lehre des Messens und Theilens beruht. Hat er diese vollständig in sich aufgenommen, so wird er darin völlig erfahren erscheinen, und kann niemals irgendwo vom Rechten abweichen.

Wir mussten deshalb dieses Buch in vier Kapitel theilen. Davon enthält das erste die allgemeinen Sätze der Geometrie und Arithmetik, durch welche der Verstand des Lesers für die wahre Kenntnis erschlossen wird; das zweite umfasst dagegen die Kenntnis von der Feldmessung nach den verschiedenen Gestalten derselben; nämlich dreieckige, quadratische oder runde und von sonst beliebiger anderer Form; das dritte behandelt die Theilung aller der Figuren, deren Ausmessung im zweiten Kapitel gezeigt wurde; das vierte endlich beschäftigt sich mit der Ausmessung von Gräben und Brunnen und dergleichen, sowie mit derjenigen der körperlichen Gegenstände, der Kugeln und Gefässe.

Dann werden wir zum Schlusse, damit die Anleitung vollständig in diesem Buche enthalten sei, zeigen, wie wir das praktisch behandeln, und so das Buch zum glücklichen Abschlusse bringen.

Erstes Kapitel. Die allgemeinen Sätze der Geometrie und Arithmetik.

1. Ein *Punkt* ist, was keine Theile hat.

2. *Linie* ist eine Länge ohne Breite.[1])

3. Eine *gerade Linie* ist diejenige, welche auf irgend welcher abgewogenen Gegenüberstellung gelegen ist.

4. *Oberfläche* ist, was nur Länge und Breite besitzt.

---

1) Hier ist die Erklärung: *cuius termini puncta sunt* ausgelassen. Leonardo hat dieselbe.

5. *Termini* autem superficiei sunt lineae.

6. *Plana superficies* est, quae super quantumlibet rectarum linearum oppositionem ad invicem dilatatur.

7. *Angulus* vero *planus* est duarum linearum quarumlibet sese in plano 5 tangentium et minime in directum iacentium ad alterutrum inclinatio.

8. Cumque rectae lineae fuerint, quae angulum continent, *angulus* ille *rectilineus* appellatur.

9. Cum linea recta super lineam rectam erigitur, feceritque duos angulos circum se sibi invicem aequales, *rectus angulus* eorum uterque nun- 10 cupabitur, et ipsa linea erecta super lineam rectam *cathetus* appellabitur.

10. *Obtusus* autem est *angulus,* qui recto maior existit.

11. *Acutus* vero, qui recto minor perhibetur.

12. Et *terminus* est finis rei.

13. *Figura* quidem est, qui sub uno vel pluribus terminis continetur.

15 **14.** *Circulus* autem est quaedam plana figura sub uno termino contenta, infra quem est punctus, a quo omnes rectae lineae, quae egrediuntur usque ad lineam circumferentem, sunt aequales.

15. Hic autem punctus *centrum* circuli vocatur.

16. *Circuli diametrum* est linea recta per circuli centrum ducta et ex 20 utraque parte in ipsius circumferentia terminata, in duo aequalia circulum secans.

17. *Semicirculus* est quaedam plana figura sub diametro et arcu a diametro comprehenso contenta.

18. *Portio* vero *circuli* est figura, quae sub recta linea et circumferentia 25 circuli continetur, sive minor seu maior sit medietate.

19. *Figurae rectilineae* sunt, quae a rectis lineis includuntur.

20. | Quippe *trilaterae figurae,* quae sub tribus rectis lineis continentur; *quadrilaterae* vero, quae quatuor rectis lineis ambiuntur; *multilaterae* autem *figurae* sunt, quae sub pluribus quam quatuor lineis comprehen- 30 duntur. 1

21. Figurarum igitur, quae sub tribus rectis lineis continentur, sunt *triangulae figurae,* quarum sunt *trianguli aequilateri,* et sunt, quorum tria latera sunt ad invicem aequalia. Ex ipsis autem sunt *aequicrurii,* et sunt, quorum duo tantum latera sunt aequalia, tertium autem inaequale. Earun-

---

12 perhibetur *B* prohibetur *A*. — 33 aequicruria.

5. *Grenzen* der Fläche aber sind Linien.

6. Eine *ebene Fläche* ist eine solche, die sich auf beliebige gegenüberliegende gerade Linien verbreitet.

7. *Ebener Winkel* ist die Neigung zweier beliebig sich in der Ebene berührenden und nicht in gegenseitiger Verlängerung liegenden Linien gegeneinander.

8. Und wenn es gerade Linien sind, welche den Winkel enthalten, so wird er ein *geradliniger Winkel* genannt.

9. Wenn eine gerade Linie auf einer andern geraden Linie aufgerichtet wird und um sich herum zwei unter sich gleiche Winkel bildet, so heisst ein jeder derselben ein *rechter Winkel,* und die gerade Linie, welche auf der andern errichtet ist, heisst *Loth.*

10. *Stumpf* heisst ein Winkel, welcher grösser als ein rechter ist.

11. *Spitz* aber, welcher kleiner als ein rechter gefunden wird.

12. *Grenze* ist das Ende eines Dinges.

13. *Figur* ist das, was zwischen einer oder mehrerer Grenzen enthalten ist.

14. *Kreis* ist eine nur von einer Grenze umschlossene ebene Figur, innerhalb deren sich ein Punkt befindet, von welchem aus alle geraden Linien, die bis an die Umfangslinie hinausgehen, einander gleich sind.

15. Dieser Punkt aber heisst *Mittelpunkt* des Kreises.

16. *Durchmesser des Kreises* ist eine gerade Linie, welche durch den Mittelpunkt des Kreises gezogen und auf beiden Seiten in dem Umfange desselben endigend den Kreis in zwei gleiche Theile theilt.

17. *Halbkreis* ist eine ebene Figur, welche zwischen dem Durchmesser und dem von dem Durchmesser überspannten Bogen enthalten ist.

18. *Kreisabschnitt* aber ist eine Figur, welche zwischen einer geraden Linie und dem Bogen eines Kreises enthalten ist, gleichgiltig ob sie grösser oder kleiner als die Hälfte ist.

19. *Geradlinige Figuren* sind solche, welche von geraden Linien eingeschlossen werden.

20. Es sind nun *dreiseitige Figuren,* welche zwischen drei geraden Linien enthalten sind, *vierseitige* aber, welche von vier geraden Linien umschlossen werden; *vielseitige Figuren* dagegen sind die, welche zwischen mehr als vier geraden Linien enthalten sind.

21. Zu den Figuren nun, welche zwischen drei geraden Linien enthalten sind, das sind *dreieckige Figuren,* gehören die *gleichseitigen Dreiecke,* das sind diejenigen, deren drei Seiten einander gleich sind; zu ihnen gehören ferner die *gleichschenkligen Dreiecke,* das heisst diejenigen, bei denen nur zwei Seiten einander gleich sind, die dritte aber ungleich. Es gehören

dem vero sunt *diversilateri.* Hi autem sunt, quorum omnia tria latera inaequalia sunt ad invicem.

22. Item ex trilateribus figuris sunt *trianguli rectianguli,* quorum unus angulus est rectus. Ipsarum quoque sunt *trianguli ampligonii,* quorum
5 unus angulus est obtusus. Sunt etiam eorundem *trianguli acutianguli,* quorum omnes tres anguli sunt acuti.

23. *Figurarum* vero *quadrilaterarum* sunt *quadrati,* et sunt aequilateri et aequianguli.

24. *Figurae parte altera longiores* sunt rectiangulae, sed non aequilaterae.

10 **25.** *Alinuaram,* quod quidam dicunt *rhumbos,* est figura quaedam aequilatera, sed non rectiangula.[1])

26. *Rhomboides* vero dicitur figura, cuius omnia duo latera sibimet opposita, nec non et anguli oppositi sunt aequales. Hec autem nec rectos angulos nec aequa latera continebit.

15 **27.** Praeter has nempe figuras ⟨omnes *almuncharif*⟩[2]) appellant.

28. Rectae lineae, quae in eadem plana superficie positae et ex utraque parte ad infinitum protractae in neutra partium concurrerint, *subalternae* dicuntur.

Quinque sunt, quae a sagaci peritia veterum requiruntur.

1. Primum quidem est, ut a quolibet puncto in quemlibet punctum
20 linea recta perducatur.

2. Secundum est, ut recta linea terminata super directum et continuum ad infinitum trahatur.

3. Tertium, ut super omnem punctum et omne spatium circulus circinetur.

4. Quartum autem, ut omnes anguli recti sint aequales ad invicem.

25 **5.** Quintum vero est, ut, si qua recta linea super duas rectas lineas ceciderit, feceritque duos angulos interiores minores duobus rectis, illae rectae lineae ab ea parte, in qua sunt duo anguli minores duobus rectis, ad infinitum protractae concurrent.

Communes omnium existimationes sunt hae.

30 **1.** Res aequales uni eidem sibi invicem sunt aequales.

2. Si aequalibus addantur aequalia, fient etiam ipsa tota aequalia.

---

1 diversilatera. Haec. — 10 rumbos *und so immer A.* rhombus *stets B.* — 13 oppositi] opposita *B.* — 13—14 rectis angulis *A.* — 14 aequi latera *A.* — 15 figuras quas appellant *A u. B. Die Konjektur ist nach dem spätern Texte gemacht.* — 16 eadem] ead'ea *A.* — 17 partium *fehlt in B.* — 23 circinetur] continetur. — 31 inaequalibus *A.*

---

1) *Alinuaram* wird sonst *Helmiaym* oder ähnlich genannt.

2) Die Ergänzung ist dem Kapitel IV dieses Werkes entnommen.

zu ihnen auch die *ungleichseitigen Dreiecke.* Es sind das die, deren alle drei Seiten unter einander ungleich sind.

22. Ebenso gehören zu den dreiseitigen Figuren die *rechtwinkligen Dreiecke,* deren einer Winkel ein rechter ist; es gehören ferner dazu die *stumpfwinkligen Dreiecke,* deren einer Winkel ein stumpfer ist; es gehören endlich dazu die *spitzwinkligen Dreiecke,* deren sämmtliche drei Winkel spitz sind.

23. Zu den *vierseitigen Figuren* aber gehören die *Quadrate,* sie sind gleichseitig und gleichwinklig.

24. Ferner die *Rechtecke* (die nach einer Richtung hin längeren Figuren), sie sind rechtwinklig, aber nicht gleichseitig.

25. Ferner *Alinuaram,* welche von einigen *Rhombus* genannt werden; es ist eine Figur, die zwar gleichseitig, aber nicht rechtwinklig ist.[1])

26. *Rhomboid* aber heifst eine Figur, bei der je zwei gegenüberliegende Seiten und je zwei gegenüberliegende Winkel gleich sind. Sie enthält aber weder rechte Winkel, noch lauter gleiche Seiten.

27. Ausser diesen Figuren heissen alle sonstigen *Almuncharif*[2]) (d. i. *Trapeze*).

28. Gerade Linien, welche in derselben ebenen Fläche gelegen und nach beiden Seiten ins Unendliche verlängert nach keiner Seite zusammenlaufen, heissen *subaltern (parallel).*

Fünf sind, welche von der weisen Kenntnis der Alten vorausgesetzt werden.

1. Und zwar ist das Erste, dass von jedem beliebigen Punkte nach jedem beliebigen Punkte eine gerade Linie gezogen werde.

2. Das Zweite ist, dass eine begrenzte gerade Linie in ihrer geraden Richtung kontinuierlich ins Unendliche verlängert werde.

3. Das Dritte ist, dass um jeden Punkt mit jedem Abstande ein Kreis beschrieben werde.

4. Das Vierte aber, dass alle rechte Winkel einander gleich sind.

5. Das Fünfte jedoch ist, dass, wenn eine gerade Linie zwei gerade Linien trifft und mit ihnen zwei innere Winkel kleiner als zwei Rechte bildet, diese beiden Linien auf der Seite, auf welcher die beiden Winkel liegen, die kleiner sind als zwei Rechte, wenn sie ins Unendliche verlängert werden, sich treffen müssen.

Gemeinsame Annahmen Aller sind folgende.

1. Grössen, welche ein und derselben gleich sind, sind unter sich gleich.

2. Wenn zu Gleichen Gleiche addiert werden, so werden auch die Ganzen gleich.

3. Et si ex aequalibus aequalia censeris, quae remanent, aequalia sunt.

4. Si inaequalibus aequalia addantur, quae reddunt, inaequalia sunt.

5. Si de inaequalibus abstrahuntur aequalia, residua quoque fient aequalia.

5 6. Ea, quae uni et eidem sunt dupla, sibi invicem sunt aequalia.

7. Quae uni et eidem subdupla fuerint, ipsa item aequalia sunt.

8. Illa, quorum unus non excedit alterum, si superponatur alteri alterum, erunt aequalia.

9. Omne totum sua parte maius existit.

10 10. Omnis vero res suis collectis partibus aequalis est.

11. Duae rectae lineae super|ficiem non continebunt. 2

Et his, quae ad geometriam pertinent, explicatis, ea, quae ad arithmeticam spectant ostendamus.

1. *Unitas* igitur est id, quo, quidquid invenitur, unum esse dicitur.

15 2. Et *numerus* est ex unitatibus profusa collectio.

3. Si minor numerus numerat summam, illius *pars* indubitanter affirmatur.

4. Si vero eum non numerat, eius *plures partes* continebit.

5. Maior autem numerus minoris numeri *multiplex* est, cum ab eius 20 summa numeratur.

6. *Par* quidem *numerus* est, qui in duo aequa sectionem recipit.

7. *Inpar* vero *numerus* est, qui per inaequales partes dividitur et unitate differt a pari.

8. *Pariter par numerus* dicitur, qui aequis vicibus a pari numeratur.

25 9. *Pariter inpar* autem *numerus* est, quem aequis vicibus numerat inpar.

10. *Inpariter inpar* dicitur, qui inaequalibus vicibus ab inpari numeratur.

11. *Compositus* vero *numerus* est, quem alius praeter unitatem numerat.

30 12. *Communicantes* quidem *numeri* sunt, qui a quovis alio numero communiter numerantur.

13. *Mutabemini* sunt *numeri*, quos Boetius in arismetricis per se

---

2 sunt] erunt *B*. — 10 vero tes *A*, res *B*. — 12—13 aritremetricam *A*. — 15 numerus est *B*, unitas est *A*.

3. Und wenn man von Gleichen Gleiche wegnimmt, so sind die Reste gleich.

4. Wenn zu Ungleichen Gleiche addiert werden, so sind die Ergebnisse ungleich.

5. Wenn von Ungleichen Gleiche abgezogen werden, so sind auch die Reste ungleich.

6. Grössen, welche von ein und demselben das Doppelte sind, sind einander gleich.

7. Grössen, welche von ein und demselben die Hälfte betragen, sind einander gleich.

8. Grössen, deren eine die andere nicht überragt, wenn man die eine auf die andere legt, sind einander gleich.

9. Jedes Ganze ist grösser als sein Theil.

10. Jedes Ding aber ist der Summe seiner Theile gleich.

11. Zwei gerade Linien begrenzen keine Fläche.

Nachdem so das zur Geometrie Gehörige dargelegt ist, wollen wir das, was die Arithmetik angeht, aufführen:

1. Die *Einheit* ist das, wodurch alles, was existiert, eins genannt wird.

2. *Zahl* ist eine aus Einheiten zusammengesetzte Summe.

3. Wenn eine kleinere Zahl eine Summe auszählt, so wird sie ein *Theil* derselben genannt.

4. Wenn sie aber dieselbe nicht auszählt, so enthält sie *mehrere Theile* derselben.

5. Eine grössere Zahl aber ist ein *Vielfaches* einer kleinern, wenn sie von deren Summe ausgezählt wird.

6. Eine *gerade Zahl* ist, welche in zwei gleiche Zahlen getheilt werden kann.

7. Eine *ungerade Zahl* aber ist, welche in ungleiche Theile getheilt wird und um eine Einheit von der geraden verschieden ist.

8. *Gerad gerade* heisst eine Zahl, welche eine gerade Anzahl mal von einer geraden ausgezählt wird.

9. *Gerad ungerade* aber ist eine Zahl, welche eine ungerade Zahl eine gerade Anzahl mal auszählt.

10. *Ungerad ungerade* heisst sie, wenn sie eine ungerade Anzahl mal von einer ungeraden ausgezählt wird.

11. *Zusammengesetzt* heisst eine Zahl, welche von einer andern als der Einheit ausgezählt wird.

12. *Communicierend* sind Zahlen, welche von einer beliebigen Zahl zugleich ausgezählt werden.

13. *Mutabemini (theilerfremd)* sind Zahlen, welche Boetius in seiner

secundos compositos, ad alios vero primos et incompositos appellat, ut 8 et 25.[1])

14. *Numerorum multiplicatio* est unius numeri secundum quantitatem unitatum alterius aggregatio, aliusque numerus ex multiplicatione proveniet.

5 15. Numeri, qui communiter ab unitate sola metiuntur, *mutabemini* nuncupantur.

16. *Quadratus numerus* est, qui ex numero in se ipso multiplicato colligitur, vel qui sub duobus aequis numeris continetur.

17. *Cubus numerus* est, qui surgit ex multiplicatione numeri in hoc, 10 quod ex eodem in se ducto colligitur, vel ⟨qui⟩ sub tribus aequis numeris continetur.

18. *Superficialis numerus* est, qui ex cuiuslibet numeri in quemlibet numerum multiplicatione formatur, vel qui sub duobus numeris collocatur.

19. Si duorum numerorum alterius in alterum multiplicatio superficiem 15 fecerit, eos duos eiusdem superficiei duo *latera* continere necesse est.

20. *Almugesem* dicitur, qui ex multiplicatione numeri in eo, quod ex unius numeri in alterum multiplicatione provenit, aggregatur, ipsique tres numeri tria almugesem *latera* continebunt.[2])

21. *Conproportionales numeri* sunt, quorum primus ex secundo, tertius-20 que ex quarto unam eandemque partem seu plures et easdem continebit.

22. Superficiales et almugesem numeri *consimiles* sunt, cum eorum latera proportionalia fuerint.

23. *Perfecti numeri* dicuntur, qui suis eius omnibus partibus aequiparantur.

25 Item quaedam huic operi valde necessaria demonstrarentur, quorum demonstrationes, quoniam ⟨ab⟩ Euclide manifeste ⟨datae⟩ reticemus.

1. Et primum quidem exponemus, quid significare velimus, cum dicimus: *multiplicatio lineae in se ipsam.* Hoc quidem sic intelligendum est, ut quadrilaterum rectiangulum, cuius omnia latera eidem lineae sunt 30 aequalia, super eandem lineam constituamus.

2. Item cum dicimus: *cuiuslibet lineae in quamlibet aliam lineam multiplicatio,* hoc significare volumus, ut quadrilaterum longum, | cuius omnes 2′

.i. in solidum

16 Almugesem *A*. — 17 ipsique *B*, ipsi quoque *A*. — 23 dicuntur *A*, sunt *B*. — 25 demonstrentur *B*. — 26 quoniam Euclide manifeste dereticemus. — 29 eidem] eiusdem.

---

1) Die Erklärung 13 scheint von dem Übersetzer eingeschoben zu sein. Sie wird ja in No. 15 wiederholt. Auch die Erwähnung des Boetius spricht gleichfalls dafür. *Mutabemini* sind also relative Primzahlen.

2) *Almugesem numeri* sind Körperzahlen mit drei verschiedenen Faktoren.

Arithmetik an sich zusammengesetzt, gegeneinander aber prim und unzusammengesetzt nennt, wie 8 und 25.[1])

14. *Multiplikation der Zahlen* ist die Addition der einen Zahl nach der Anzahl der Einheiten der andern, und aus der Multiplikation entsteht eine neue Zahl.

15. Zahlen, welche gleichzeitig nur von der Einheit gemessen werden, heissen *theilerfremd.*

16. Eine *Quadratzahl* ist diejenige, welche aus der Multiplikation einer Zahl mit sich selbst entsteht, oder die zwischen zwei gleichen Zahlen enthalten ist.

17. *Kubikzahl* ist eine solche, welche aus der Multiplikation einer Zahl mit dem entsteht, was aus derselben Zahl in sich selbst geführt herauskommt, oder welche zwischen drei gleichen Zahlen enthalten ist.

18. *Oberflächenzahl* heisst diejenige, welche aus der Multiplikation von irgend einer Zahl mit einer andern beliebigen Zahl gebildet wird, oder die zwischen zwei Zahlen enthalten ist.

19. Wenn durch Multiplikation zweier Zahlen mit einander eine Oberflächenzahl entsteht, so müssen die beiden Zahlen die *Seiten* der Oberflächenzahl sein.

20. *Almugesem (Körperzahl)*[2]) wird genannt, die aus der Multiplikation einer Zahl mit dem entsteht, was aus der Multiplikation einer Zahl mit einer andern hervorgeht, und diese drei Zahlen sind die *Seiten* der Körperzahl.

21. *Proportionierte Zahlen* sind solche, deren erste von der zweiten und die dritte von der vierten ein und denselben Theil oder mehrere gleiche Theile enthält.

22. Oberflächen- und Körperzahlen sind *ähnlich,* wenn ihre Seiten proportioniert sind.

23. *Vollkommene Zahlen* heissen solche, die allen ihren Theilen zusammengenommen gleich sind.

Nun werden wir einige Sätze, welche für dieses Werk sehr nöthig sind, anführen, deren Beweise wir aber, da sie von Euklides handgreiflich gegeben sind, verschweigen werden.

1. Zunächst wollen wir auseinandersetzen, was wir damit bezeichnen wollen, wenn wir sagen: *Multiplikation einer Geraden mit sich selbst.* Das ist so zu verstehen, dass wir ein rechtwinkliges Viereck, dessen sämmtliche Seiten jener Linie gleich sind, über dieser Linie konstruieren.

2. Ebenso wollen wir mit dem Ausdrucke: *Produkt irgend einer Linie mit irgend einer andern,* bezeichnen, dass wir ein Rechteck konstruieren,

anguli sunt recti, duoque latera aequidistantia uni illarum linearum, aliaque duo latera aequidistantia alteri linearum sicut aequalia constituamus.[1])

His autem ostensis dicendum est, quod:

3. *Si recta linea in duo ubilibet abscissa fuerit, qui totius in se ipsum multiplicatione quadratus describitur, his, qui ab utriusque portionibus multiplicatione in se ipsis describuntur quadratis et duplo rectianguli, qui sub utraque portione continetur, aequatur.*

Cuius similitudinem, ut levius appareat, in numeris ostendamus. Sit itaque linea 12 ulnarum in 7 et 5 divisa. Erit igitur lineae in se ipsam multiplicatio 144. Qui numerus multiplicationi 7 in se ipsum, quod est 49, et multiplicationi 5 in se ipsum, quod est 25, nec non et duplo multiplicationis 7 in 5, quod est 70, aequatur.[2])

4. *Item si linea recta in duo aequalia et totidem inaequalia dividetur, quae a totius lineae inaequalium portionum multiplicatione ad invicem rectiangula superficies efficitur, cum quadrato a linea, quae est inter utrasque sectiones, descripto, quadrato, qui a multiplicatione totius lineae dimidii in se ipsum formatur, aequabitur.*

Sit igitur exempli causa quaedam linea 12 ulnarum in duo aequalia, quae sunt 6 et 6, et duo inaequalia, quae sunt 8 et 4, divisa; eritque multiplicatio 8 in 4, quae sunt partes inaequales, 32, multiplicatioque binarii, qui inter utrasque sectiones continetur, in se ipsum 4, quod totum, cum in unum redactum fuerit, numero 36, qui est medietatis totius lineae multiplicatio in se ipsam, aequatur.[3])

5. *Si recta item linea in duo aequa secetur, cui alia in directum linea recta adiungatur, rectiangula superficies, quae sub totius cum adiuncta in adiunctam multiplicatione continetur, cum quadrato, qui a lineae dimidio describitur, quadrato a dimidio et ab adiuncta constanti aequatur.*

Sit quidem linea 10 ulnarum in duo aequalia, quae sunt 5 et 5, divisa, eique duo superadiungantur, et 12 efficiunt. Erit igitur multiplicatio 12 in duo cum multiplicatione 5 in se ipsum, ⟨quod est primae lineae medietas, quadrato 7⟩, quod est primae lineae medietas cum additamento, ⟨aequalis⟩.[4])

---

1 sint *B.* — 4 abscisa *und so immer.* — 5 hiis *und so immer.* — qui] quod. — 5—6 proportionis multiplicationibus. — 6 ips^{s}um(!) *A.* — 16 septiones *und so immer.* — 21 qui] quod *B.* — 23 eum in se *A.* — 24 secentur. — 30—31 quod ... quadrato 7 *in A auf dem Rande ausradiert.* — 32 aequalis *in A über der Zeile ausradiert.*

dessen eines Paar paralleler Seiten einer der beiden Linien, das andere Paar paralleler Seiten der andern Linie gleich ist.[1])

Nachdem dies gezeigt ist, sagen wir weiter:

3. *Wenn eine gerade Linie irgendwo in zwei Theile getheilt wird, so ist das Quadrat, das durch Multiplikation der ganzen Linie mit sich selbst beschrieben wird, gleich denjenigen Quadraten, die durch Multiplikation beider Theile mit sich selbst beschrieben werden, plus dem doppelten Rechteck, das von den beiden Theilen gebildet wird.*

Damit das besser einleuchte, zeigen wir ein Beispiel in Zahlen. Es sei also eine Linie von 12 Ellen in 5 und 7 getheilt. Nun ist das Quadrat der Linie 144, und diese Zahl ist gleich dem Quadrate von 7, das ist 49, plus dem Quadrate von 5, das ist 25, und plus dem doppelten Produkte von 7 und 5, das 70 beträgt.[2])

4. *Ferner, wenn eine gerade Linie in zwei gleiche und ebensoviele ungleiche Theile getheilt wird, so ist das Rechteck, das aus der Multiplikation der ungleichen Theile der ganzen Linie mit einander gebildet wird, plus dem Quadrate der Linie, welche zwischen den beiden Theilpunkten liegt, dem Quadrate gleich, das durch Multiplikation der Hälfte der ganzen Linie mit sich selbst gebildet wird.*

Es sei also z. B. eine Linie von 12 Ellen in zwei gleiche Theile, das ist 6 und 6, und zwei ungleiche, die 8 und 4 sein mögen, getheilt. Dann ist das Produkt von 8 und 4, das sind die beiden ungleichen Theile, 32, das Produkt von 2, die zwischen beiden Theilpunkten enthalten ist, mit sich selbst gleich 4, und das ist, wenn es zusammengezählt wird, der Zahl 36 gleich, welche das Produkt der Hälfte der ganzen Linie mit sich selbst darstellt.[3])

5. *Ebenso, wenn eine Linie in zwei gleiche Theile getheilt, und sie um eine andere gerade Linie direkt verlängert wird, so ist das Rechteck, das aus der ganzen Linie plus der Verlängerung und der Verlängerung entsteht, plus dem Quadrate der halben Linie, dem Quadrate gleich, das über der Hälfte plus der Verlängerung entsteht.*

Es sei nämlich eine Linie von 10 Ellen in zwei gleiche Theile, das ist 5 und 5, getheilt, und sie sei um 2 verlängert, so dass 12 entstehen. Dann ist das Produkt von 12 in 2 und das Produkt von 5 mit sich selbst, das ist der Hälfte der ersten Linie, dem Quadrate von 7 gleich, welches die Hälfte der ersten Linie plus der Verlängerung darstellt.[4])

---

1) Aus diesen beiden Nummern und später noch zu nennenden hat Leonardo seine *Distinctio prima de multiplicatione camporum* gemacht und weitläufig durch Beispiele auseinandergelegt. 2) Leonardo 14, 29. 3) Leonardo 15, 21.
4) Leonardo 15, 5 v. u.

6. *Item si recta linea in duo ubilibet abscindatur, quadratus, qui a totius in se ipsam multiplicatione colligitur, cum quadrato ab alterius portionis multiplicatione constituto aequus est duplo rectianguli, qui sub totius in praedictam portionem multiplicatione continetur, et eo quadrato, qui a reliquae portionis in se ipsam multiplicatione colligitur.*

Sit verbi gratia linea 12 ulnarum in 5 et 7 divisa, eritque multiplicatio 12 in se ipsum 144, multiplicatioque 5 in se ipsum 25, quod totum collectum 169 procreat. Hic autem numerus duplo multiplicationis 12 in 5 et multiplicationi 7 in se ipsum aequatur.[1])

7. *Item si recta linea in duo aequalia et totidem inaequalia secetur, qui a totius lineae inaequalium portionum multiplicatione in se ipsas | duo procreantur quadrati, duplo duorum quadratorum, qui sub dimidia et ea, quae est inter utrasque sectiones continetur, aequales fore perhibentur.*

Ut in linea 12 ulnarum per aequalia in 6 et 6 divisa et per inaequalia in 5 et 7 abscissa multiplicatio 7 in se ipsum et 5 in se ipsum 74 efficient. Duplum autem multiplicationis 6, quod est totius medietas, in se ipsum 72, et duplum multiplicationis unius, quod inter utrasque sectiones continetur, duo; duobus vero 72 superadditis 74 procreabuntur.[2])

8. *Si recta linea in duo aequa divisa fuerit, cui quaedam recta linea in directum adiciatur, qui a tota cum adiuncta quadratus describitur, et qui sub illa, quae superadiuncta est, quadratus efficitur, utrique simul assumpti, ei quadrato, qui a dimidia describitur, et ei quadrato, qui efficitur ab ea, quae ex dimidia et adiuncta consistit, utrisque simul acceptis, dupli fore pronunciantur.*

Ut exempli causa, si lineae 10 ulnarum in duo aequalia, quae sunt 5 et 5, divisae 2 superaddantur, 12 procreabuntur, eritque multiplicatio 12 in se ipsum, quod est longitudo lineae cum additamento, et multiplicatio binarii in se ipsum, quod est superadiunctum, in unum coadunatae duplo multiplicationis 5 in se ipsum, quod est dimidium primae lineae, et duplo multiplicationis 7 in se ipsum, quod ex dimidio et adiuncto colligitur, aequalis.[3])

9. *Item si duae rectae lineae se invicem intra circulum intersecant, rectiangula superficies, quae sub duabus earum partibus continetur, aequa est superficiei rectiangulae, quae sub duabus alterius lineae partibus collocatur.* Et haec est figura (Fig. 1).[4])

---

1 qui ab. — 10—11 qui a] qz. — 13 aequales] et quae. — 15 74 *B*, 75 *A*. — 16 *Nach* 72 *wiederholt A nochmals:* et duplum ... ipsum 72. — 20 qui a] qz. — qui] quod. — 22. ei] et.

---

1) Leonardo 16, 18. 2) Leonardo 15, 1. 3) Leonardo 16, 3 v. u. 4) Leonardo 18, 16 v. u.

6. *Wenn ebenso eine gerade Linie beliebig in zwei Theile getheilt wird, so ist das Quadrat der ganzen Linie plus dem Quadrate des einen Theiles dem doppelten Rechtecke gleich, welches das Produkt der ganzen Linie in den besagten Theil darstellt, plus dem Quadrate des andern Theiles.*

Es sei z. B. eine Gerade von 12 Ellen in 5 und 7 getheilt, dann wird das Quadrat von 12 gleich 144, und das Quadrat von 5 gleich 25. Beides zusammen ergiebt 169. Diese Zahl ist aber gleich dem doppelten Produkte von 12 in 5 plus dem Quadrate von 7.[1])

7. *Desgleichen, wenn eine gerade Linie in zwei gleiche und ebenso viele ungleiche Theile getheilt wird, so ist die Summe der beiden durch Multiplikation der beiden ungleichen Theile mit sich selbst entstehenden Quadrate gleich dem Doppelten der beiden Quadrate, welche über der Hälfte der Linie und dem zwischen den beiden Theilpunkten liegenden Stücke beschrieben werden.*

So betragen z. B. in einer Geraden von 12 Ellen, die in gleiche Theile, das ist 6 und 6, und in ungleiche Theile, nämlich in 5 und 7, geschnitten ist, die Quadrate von 5 und 7 zusammen 74. Das doppelte Quadrat von 6 aber, das ist von der Hälfte der ganzen Linie, ist 72, und das doppelte Quadrat von 1, das ist, was zwischen den beiden Theilpunkten liegt, ist 2. 2 aber zu 72 hinzugezählt giebt 74.[2])

8. *Wenn eine gerade Linie in zwei gleiche Theile getheilt ist, und sie um eine andere gerade Linie direkt verlängert wird, so ist das Quadrat über der ganzen Linie plus der Verlängerung zusammen mit dem Quadrate der Verlängerung doppelt so gross als das Quadrat, das über der Hälfte beschrieben ist, plus dem Quadrate über der Hälfte und der Verlängerung.*

So entsteht z. B., wenn eine Linie von 10 Ellen in zwei gleiche Stücke getheilt wird, das ist in 5 und 5, und dann um 2 verlängert, 12, und es ist das Quadrat von 12, das ist das der Linie plus der Verlängerung, zusammen mit dem Quadrate von 2, das ist dem der Verlängerung, gleich dem Doppelten des Quadrates von 5, das ist der Hälfte der ersten Linie, plus dem Doppelten des Quadrates von 7, welche aus der Hälfte und der Verlängerung zusammen besteht.[3])

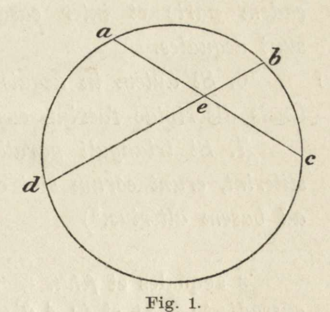


Fig. 1.

9. *Ebenso, wenn zwei gerade Linien sich innerhalb eines Kreises schneiden, so ist das Rechteck aus den Theilen der einen Linie gleich dem Rechteck aus den Theilen der andern Linie.*[4]) Und das ist die zugehörige Figur (Fig. 1).

Similiter et alia quaedam, quarum demonstrationes in geometria perfecte monstrantur, scire non est inutile.

1. *Si duas igitur rectas lineas ⟨aequales et⟩ aequidistantes aliae duae rectae lineae ad easdem partes ab earum terminis protractae coniunxerint, eas aequidistantes et aequales esse necesse est.*[1])

2. *Item trianguli consimiles sunt, quorum anguli sunt invicem aequales, et quorum proportio duorum laterum angulo unius trianguli adiacentium fuerit ut proportio duorum laterum angulo alterius trianguli praedicto aequali adiacentium.*

Ut in his triangulis abc, def (Fig. 2), quorum sunt aequales ad invicem, sicut angulus a trianguli abc a lateribus ac, ab contentus aequus est angulo d trianguli def contento a lateribus de, df; et similiter angulus b angulo f, et angulus c angulo e est aequalis. Hos ergo similes triangulos esse dicimus, proportioque lateris ba unius trianguli ad latus fd alterius trianguli ut proportio lateris ac eiusdem trianguli ad latus ed alterius. Simili quoque modo erit et proportio aliorum laterum aequis angulis adiacentium. ⟨Proportioque lateris ba unius trianguli ad latus ac est ut proportio fd alterius trianguli ad latus de. Item proportio lateris ab unius trianguli ad latus fd alterius trianguli est ut proportio lateris bc eiusdem trianguli ad latus fe alterius.⟩

Horum autem consimilium triangulorum et quadrilaterorum ⟨et⟩ figurarum | multiangularum sunt eaedem demonstrationes. 3′

3. *Omnes item trianguli, qui super eadem base ad easdem partes et in eisdem alternis lineis conformantur, sunt aequales ad invicem.*

4. *Si autem in aequis basibus ad easdem partes et in eisdem alterius lineis collocantur, similiter erunt ad invicem aequales.*

5. *Item omnes parallelogrammae superficies super eandem basem in eadem parte et inter easdem lineas aequidistantes constitutae sibi invicem sunt aequales.*

6. *Si autem in aequis basibus in eadem parte et in eisdem subalternis lineis discriptae fuerint, eas similiter ad invicem aequales esse necesse est.*

7. *Si trianguli parallelogrammaeque superficies eiusdem altitudinis exstiterint, erunt eorum sibi consimilium ad invicem proportio sicut basis unius ad basem alterius.*[2])

---

3 aequales et *fehlt.* — 17—20 Proportioque . . . alterius *in A auf dem Rande ausradiert.* — 21 et *in A über der Zeile ausradiert.* — 22 heaedem *A.* — 25 autem] aut. — 26 colocantur. — 27 parallelogramae *und so immer.* — 30 in aequis] in eis quamvis *A*, in eis q̄vis *B.*

---

1) Leonardo 2, 26. 2) Die No. 3—7 bei Leonardo 2, 15 v. u.

Es ist ferner nicht ohne Nutzen, auch noch einige andere Sätze zu kennen, deren Beweise in der Geometrie (Euklid's) vollständig gezeigt werden.

1. *Wenn zwei gleiche und parallele Gerade durch zwei andere gerade Linien, die von ihren Endpunkten aus nach derselben Seite hin gezogen sind, verbunden werden, so müssen diese ebenfalls gleich und parallel sein.*[1])

2. Ferner: *Dreiecke sind ähnlich, deren Winkel einander gleich sind, und bei denen das Verhältnis zweier Seiten, die dem einen Winkel des ersten Dreiecks anliegen, gleich dem Verhältnis der beiden Seiten ist, welche dem gleichen Winkel im andern Dreiecke anliegen.*

Wie in den beiden Dreiecken abc, def (Fig. 2), bei welchen einander gleich sind: der Winkel a des Dreiecks abc, der von den Seiten ac, ab eingeschlossen wird, gleich dem Winkel d des Dreiecks def, eingeschlossen von den Seiten de, df; ebenso Winkel b dem Winkel f, und Winkel c dem Winkel e gleich. Diese Dreiecke also nennen wir ähnlich, und das Verhältnis der Seite ba des einen Dreiecks zu der Seite fd des andern ist gleich dem Verhältnis der Seite ac des ersten Dreiecks zu der Seite ed des andern. In ähnlicher Weise wird auch das Verhältnis der andern Seiten gleich, welche gleichen Winkeln anliegen. Es ist auch das Verhältnis der Seite ba des einen Dreiecks zu der Seite ac gleich dem Verhältnis von fd des andern Dreiecks zur Seite ed. Ebenso verhält sich die Seite ab des einen Dreiecks zur Seite fd des andern wie die Seite bc des ersten Dreiecks zur Seite fe des andern.

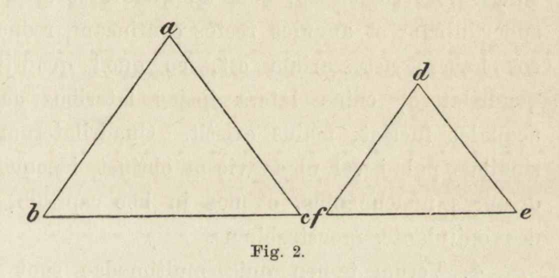


Fig. 2.

Für Vierecke aber und vieleckige Figuren gelten dieselben Beweise wie für diese Dreiecke.

3. Ferner: *Alle Dreiecke, welche über derselben Grundlinie auf derselben Seite und zwischen denselben parallelen Linien konstruiert werden, sind einander gleich.*

4. *Sie werden aber auch gleich sein, wenn sie über gleichen Grundlinien nach derselben Seite und zwischen denselben Parallelen liegen.*

5. *Ebenso sind alle Parallelogramme einander gleich, welche über derselben Grundlinie nach derselben Seite und zwischen denselben Parallelen gelegen sind.*

6. *Sie sind aber auch nothwendigerweise gleich, wenn sie auf gleichen Grundlinien nach derselben Seite hin und zwischen Parallelen konstruiert sind.*

7. *Wenn Dreiecke und Parallelogramme von gleicher Höhe einander ähnlich sind, so verhalten sie sich gegeneinander wie ihre Grundlinien.*[2])

Capitulum secundum de agrorum dimensionibus.

1. Cum in hoc opere de ulna in linea mentionem facimus, ulnam in longitudine tantum absque latitudine, lector, intelligas.

2. Cumque ulna in superficie vel ulna superficialis dicetur, quadratam ulnam, quatuor scilicet laterum in longum et latum fore non dubites, cuius unumquodque latus unam ulnam in longitudine continet, ⟨et⟩ omnes ipsius anguli recti.

Per hanc autem quadraturam semper fit consideratio huius rei, ⟨etenim⟩ est ille unus, cum quo superficies mensurabitur.

3. Cumque dicetur: hic triangulus aut hoc quadrilaterum 5 vel 6 ulnas continet, hunc praedictum quadratum illius superficiei certam mensuram fore cognoscas, cum ad quadratos aequales, quorum singuli ulnam super ulnam et angulos rectos contineant, reducetur. Rectas autem angulos eos habere necessarium est, eo quod quadrilaterum rectiangulum omni quadrilatero, cuius latera ipsius lateribus aequantur, anguli autem inaequales fuerint, maius existit. Quadrilaterum ergo rectiangulum dimensionibus palmi vel ulnae vicem obtinet, ideoque terrarum dimensiones quadraturas nuncupamus, et nos in hoc capitulo, qualiter campi quadrentur, deo opitulante, monstrabimus.

4. Verum tamen quia multimodae sunt terrarum figurae, quaedam enim triangulatae, quaedam vero quadrilaterae, quaedam autem aliarum multarum figurarum existunt, hoc capitulum in quinque partes dividimus, quarum prima est in metiendo ea quadrilatera, quorum omnia latera sunt aequalia, nec non et illa, quorum omnes anguli sunt recti. Secunda vero triangulorum genera metitur. Tertia quidem qualiter quadrilatera, quorum latera omnia non sunt aequalia, et quorum omnes anguli ⟨non⟩ sunt recti, mensurentur, docet. Quarta circulares ac semicirculares campos, et quorum figurae sunt plus minusve semicirculo, perfecte mensurat. Quinta angulorum plus quam quatuor latera continentium certas indicat mensuras.

Pars prima in illorum quadrilaterorum dimensione, quorum omnia latera sibi invicem sunt aequalia, | nec non et illorum, quorum omnes anguli sunt recti. 4

1. In hoc nempe particula trium quadrilaterarum figurarum dimensiones, prout possumus, explicabimus. Ex quibus sunt *quadrati,* qui sunt aequilateri et aequianguli; sunt et *rhumbi,* qui quidem sunt aequilateri,

---

1 *In A ausradiert.* — 6 et *fehlt.* — 8 etenim *in A über der Zeile ausradiert.* — 26 non *fehlt.* — 27 et docet. — 33 trium *fehlt in B.*

Zweites Kapitel. Über Ausmessung der Felder.

1. Wenn wir in diesem Werke von einer Elle als Linie reden, so möge der Leser darunter nur die Länge einer Elle ohne Breite verstehen.

2. Wenn wir aber von einer Elle als Fläche oder einer Flächenelle sprechen, so verstehen wir darunter eine Quadratelle von vier Seiten in der Länge und Breite, so dass jede Seite die Länge einer Elle besitzt, und alle Winkel derselben rechte sind. Durch die Bildung solcher Quadrate geschehen alle Betrachtungen dieser Art, denn es ist jene Einheit, mit welcher Flächen gemessen werden.

3. Und wenn gesagt wird: Dieses Dreieck oder dieses Viereck enthält 5 oder 6 Ellen, so merke man, dass das oben erklärte Quadrat ein gewisses Maass dieser Fläche ist, wenn dieselben in gleichgrosse Quadrate, deren jedes eine Elle mal einer Elle und rechte Winkel enthält, verwandelt wird. Es muss aber rechte Winkel besitzen, da jedes rechtwinklige Viereck grösser ist als jedes andere Viereck, dessen Seiten den Seiten des Rechtecks gleich, die Winkel aber ungleich sind. Das Quadrat vertritt also mit seinen Dimensionen die Stelle einer Palme oder einer Elle, und deshalb werden die Inhaltsbestimmungen von Landstücken Quadraturen genannt, und wir wollen in diesem Kapitel mit Gottes Hilfe zeigen, wie Felder quadriert werden.

4. Da aber die Gestalten der Landstücke vielartig sind, einige sind nämlich dreieckig, andere viereckig, andere wieder haben mancherlei andere Gestalten, so haben wir dieses Kapitel in fünf Theile getheilt. Der erste lehrt die Ausmessung derjenigen Vierecke, welche lauter gleiche Seiten haben, und derjenigen, deren sämmtliche Winkel rechte sind. Der zweite dagegen misst die Arten der Dreiecke. Im dritten wird gelehrt, wie Vierecke, deren Seiten nicht sämmtlich gleich und deren Winkel nicht alle rechte sind, ausgemessen werden. Der vierte misst vollständig die kreisförmigen und halbkreisförmigen Felder und diejenigen, deren Gestalten mehr oder weniger sind als ein Halbkreis. Der fünfte lehrt die Ausmessung der mehr als vier Seiten enthaltenden Vielecke.

Erster Theil: Die Ausmessung derjenigen Vierecke, deren Seiten sämmtlich gleich sind, sowie derjenigen, bei denen alle Winkel rechte sind.

1. In diesem Theile werden wir also die Ausmessung der vierseitigen Figuren, soweit wir vermögen, auseinandersetzen. Zu ihnen gehören *die Quadrate,* die gleichseitig und gleichwinklig sind; es gehören zu ihnen ferner *die Rhomben,* die zwar gleichseitig aber nicht rechtwinklig sind; zu

sed non rectianguli; ex eisdem et sunt *figurae parte altera longiores,* quas rectiangulas, sed non aequilateras esse dicimus.

2. Primum igitur ipsius *quadrati* dimensiones ostendimus, quem aequilaterum et aequiangulum fore proponimus, quem etiam certam communem superficierum quarumlibet figurarum mensuram esse praediximus. Harum autem dimensionum modus est, ut prius cuiusque ipsorum laterum lineares mensuras invenias, inventasque in sui ipsius summam multiplices, indeque collectum embadum eiusdem quadrati fore non ambigas.

Ad cuius similitudinem si quadratus aequiangulus, cuius singula latera duas lineares ulnas contineant, describatur, eius embadum quatuor quadratas ulnas maiori quadrato consimiles continebit, eo quod, si binarium per binarium duxeris, quatuor efficies.

Et ut liquidius hoc ad oculum deprehendas, esto quadratus *abcd* (Fig. 3), cuius unumquodque latus in duo aequa dividatur, ut latus *ab* supra punctum *e*, latus vero *bc* supra punctum *f*, latus autem *cd* supra punctum *g*, latus quoque *da* supra punctum *h* secetur. Post hoc a puncto *e* ad punctum *g* lineam *eg*, a puncto vero *f* usque ad *h* lineam *fh* producemus. Dicimus igitur, hunc qua⟨dratum⟩ in quatuor aequa fore divisum, in quorum unoquoque ulna super ulnam continetur, omnesque maiori quadrato *abcd* adsimiliantur, et in unum collecti aequantur, at ipsi sunt totius quadrati totum embadum. Horum quidem unumquemque maiori adsimiliari diximus, ⟨quia⟩ eorundem singulorum latera lateribus maioris sunt comproportionalia: est enim eorum unumquodque latus lateris quadrati *abcd* medietas, et eorum omnes anguli illius angulis aequantur, sunt enim utrique omnes anguli recti invicem aequales. Et quia ⟨pro⟩portio istorum quadratorum ad invicem est eadem, ipsi invicem sunt aequales, totique in unum collecti primum quadratum complent, et singuli unam ulnam in longitudine et alteram in latitudine suscipiunt. Hac igitur demonstratione quadratorum embada reperiuntur.[1])

Ex hoc etiam manifestum est, quod in omni quadrato rectiangulo, in cuius laterum longitudine duas ulnas invenies, quatuor incunctanter ulnae continebuntur. Igitur in cuiuscunque longitudine 10 lineales ulnae fuerint, in eius embado 100 superficiales ulnae reperientur.

3. At si parte altera longior fuerit, et eius embadum scire volueris,

---

3 quadrati] quadrilateri. — quem] qui *B*. — 8 embadus. — 11 eoqȝ *A*. — 14 unum quidem latus. — 18 quadratum] qua. — 20 adsimulantur. — 22 quia *fehlt*. — 25 anguli] at. — portio. — 29 quadratorum] figurarum.

---

1) Leonardo 5, 19 unter Benutzung der gleichen Figur mit gleicher Buchstabenbezeichnung. Es gehört dies bei ihm zu seiner *Distinctio prima*. s. o. S. 21.

ihnen gehören auch *die Rechtecke,* die wir wohl rechtwinklig aber nicht gleichseitig nennen.

2. Wir werden daher zuerst des *Quadrates* Ausmessung zeigen, das wir als gleichseitig und gleichwinklig annehmen, und von dem wir vorher sagten, es sei das sichere Maass aller beliebig gestalteten Figuren. Die Art der Ausmessung ist nun, dass man zunächst das Maass der Länge jeder Seite desselben bestimmt, und das Resultat mit seiner eigenen Länge vervielfacht. Das Ergebnis ist dann sicher der Flächeninhalt dieses Vierecks.

Als ein Beispiel sei ein gleichwinkliges Quadrat, dessen einzelne Seiten je zwei Längenellen enthalten, beschrieben, dann wird sein Flächeninhalt gleich vier Quadratellen sein, die dem grösseren Quadrate ähnlich sind, weil wenn man zwei mal zwei multipliciert, vier hervorgehen.

Damit nun dieses leichter und augenfälliger begriffen werde, sei das Quadrat $abcd$ gegeben (Fig. 3), von dem jede Seite in je zwei gleiche Theile getheilt werde. So sei die Seite ab im Punkte e, die Seite bc aber im Punkte f, die Seite cd im Punkte g, die Seite da endlich im Punkte h getheilt. Wir ziehen darauf vom Punkte e nach dem Punkte g die Gerade eg, vom Punkte f aber nach dem Punkte h die Linie fh, dann behaupten wir, dass das Quadrat in vier gleiche Theile zerlegt ist, in deren jedem eine Elle mal einer Elle enthalten ist, und dass jedes dem grössern Quadrate ähnlich ist. Zusammengefasst aber sind sie ihm gleich, und sind also des ganzen Quadrates Flächeninhalt. Wir sagen aber, es sei ein jedes dem grossen Quadrate ähnlich, weil die einzelnen Seiten derselben den Seiten des grössern proportioniert sind: es ist ja jede ihrer Seiten die Hälfte einer Seite des Quadrates $abcd$, und alle Winkel des einen sind gleich denen des andern, denn beiderseits sind alle Winkel rechte, und daher einander gleich. Und da das Verhältnis dieser Quadrate ein und dasselbe ist, so sind sie unter einander gleich, und alle zusammengefasst machen das erste Quadrat aus, jedes einzelne aber hat eine Elle in der Länge und eine Elle in der Breite. Mit solchen Schlüssen werden also die Flächeninhalte der Quadrate gefunden.[1]

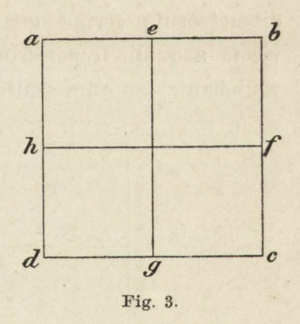


Fig. 3.

Hieraus ist auch ferner klar, dass in jedem rechtwinkligen Quadrate, in dessen Seitenlänge zwei Ellen gefunden werden, vier Quadratellen enthalten sind. Wenn also in jeder Seitenlänge 10 Ellen enthalten sind, so werden im Flächeninhalte desselben 100 Quadratellen gefunden werden.

3. Wenn aber das Viereck ein Rechteck ist, und man den Flächen-

quodlibet eorum laterum in latus sibi contiguum ⟨multiplicans embadum invenies.

Ut in hac parte altera longiori, cuius unum latus 9 ulnas, aliud vero ei contiguum⟩ 5 ulnas continet. Huius igitur embadum si nosse desideras, 9 in 5 multiplica, et 45 ulnas in eius embado procul dubio reperies (Fig. 4).

4. Et hoc est modus numerandi qua|drilatera ⟨aequilatera⟩ et non aequilatera, quorum anguli sunt recti. Verum quia multotiens anguli, cum recti non sint, recti videntur, quandam regulam, qua omnia quadrilatera ⟨aequilatera⟩, quorum omnes anguli aequales vel inaequales fuerint, veraciter numerare valeas, indicabo.

In omni igitur ⟨figura⟩ quadrilatera aequilatera, si duo protrahuntur diametra, sese invicem in duo aequa secundum rectum angulum secabunt. Quare si unius diametri ⟨dimidium⟩ in totam alterius diametri summam duxeris, eius aream nimirum invenies.

5. Ob hoc itaque, qui subtiliter agrorum dimensiones observabant, cum eorum omnia latera sibi invicem aequalia fore cognoscebant, ipsorum diametrorum certas quantitates adinvenientes, quorum diametra sibi invicem aequalia reperierunt, ipsorum embada per laterum quantitates adinveniebant. Quorum ⟨autem⟩ diametra inaequalia iudicabant, velut in rhumbis, eorum unius diametri dimidium in totam alterius quantitatem multiplicantes ipsius areas veraciter inveniebant.

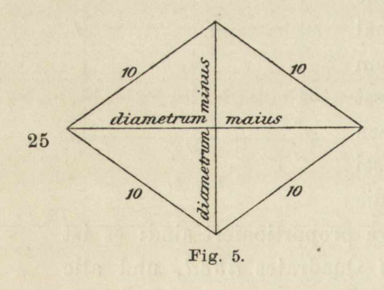


Fig. 5.

Ut si ponamus in quadrilatero, cuius omnia latera 10 ulnarum exstiterint (Fig. 5), angulos autem nequaquam ⟨aequales⟩ habuerit, et hic est rhumbus, cuius diametra sunt inaequaelia, unius eorum longitudinem 12, alterius vero 16 ulnarum ⟨invenies⟩. Cum ergo medietatem unius in summam alterius multiplicaveris, 96, quod est totum embadum, procreabis, ut in hac subscripta figura si 8 in 12 vel 6 in 16 duxeris, inde collectum totius aream efficiet.[1])

6. Ast si demonstrationibus scire volueris istius quadrilateri aream 96 ulnas continere, hanc eandem figuram depingens iterum eam *abcd* lit-

---

1—4 multiplicans ... contiguum *auf dem Rande von A ausradiert.* — 7 aequilatera *über der Zeile in A ausradiert.* — 8 multotiens] multiplicationes. — 9 quandam] q̄n̄. — 10 aequilatera *fehlt.* — 12 figura *fehlt.* — 14 dimidium *fehlt.* — 15 eius eius *A.* — 20 autem *in A über der Zeile ausradiert.* — velut *fehlt in B.* — 26 aequales *fehlt.* — 26—27 hic est *B*, ibi est *A.* — 29 invenies *fehlt.* — ergo *A*, itaque *B.* — medietas. — 34 66 ulnas *A.* — depinges.

inhalt wissen will, so findet man durch Multiplikation einer beliebigen Seite mit der ihr anliegenden den Flächeninhalt.

In dem Rechtecke z. B., dessen eine Seite 9 Ellen, die andere anliegende aber 5 Ellen misst. Wenn man also von diesem den Inhalt kennen will, so multipliciert man 9 mit 5, und findet ohne Zweifel 45 Quadratellen im Flächeninhalte (Fig. 4).

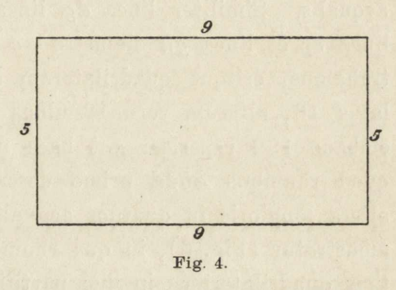


Fig. 4.

4. Das ist also die Art und Weise gleichseitige und ungleichseitige Vierecke auszumessen, deren Winkel rechte sind. Da aber vielfach Winkel, obwohl sie keine rechten sind, doch rechte zu sein scheinen, so wollen wir eine Regel angeben, mittelst deren man alle gleichseitigen Vierecke, mögen die Winkel gleich oder ungleich sein, genau ausmessen kann.

Wenn man nämlich in einem beliebigen gleichseitigen Viereck beide Diagonalen zieht, so schneiden sie sich gegenseitig in je zwei gleiche Theile und treffen sich unter rechten Winkeln. Wenn man also die Hälfte der einen Diagonale mit der Länge der andern Diagonale vervielfacht, so findet man natürlich seinen Flächeninhalt.

5. Wenn daher diejenigen, welche die Ausmessung der Äcker säuberlich besorgen, alle Seiten derselben einander gleich erkannten, so suchten sie die genauen Längen der Diagonalen. Fanden sie dann, dass die Diagonalen einander gleich waren, so suchten sie den Flächeninhalt durch die Länge der Seiten. Wurden aber die Diagonalen ungleich geschätzt, wie in den Rhomben, so vervielfachten sie die Hälfte der einen Diagonale mit der ganzen Länge der andern, und fanden so genau den Flächeninhalt derselben.

Nehmen wir z. B. ein Viereck, dessen sämmtliche Seiten je 10 Ellen enthalten (Fig. 5), die Winkel aber keineswegs rechte sind, dann ist das also ein Rhombus, dessen Diagonalen ungleich sind, und man finde die Länge der einen zu 12, die der andern zu 16 Ellen. Wenn wir dann also die Hälfte der einen mit der ganzen Länge der andern vervielfachen, so entsteht 96, das ist der ganze Flächeninhalt. Wenn man daher in der nebenstehenden Figur 8 mit 12 oder 6 mit 16 multipliciert, so ist das Produkt der Inhalt des ganzen Vierecks.[1])

6. Will man aber den Beweis führen, dass der Inhalt dieses Vierecks 96 Quadratellen enthält, so zeichne man nochmals dieselbe Figur (Fig. 6) und bezeichne sie mit den Buchstaben $abcd$, dann sind ac, bd ihre beiden

1) Leonardo 73, 9 v. u.

teris scribas (Fig. 6). Erunt *ac*, *bd* duo eiusdem diametra. Post hoc a puncto *b* cathetum ex utraque parte protrahatur, in cuius extremitatibus *e*, *f* litterae describantur, et a puncto *d* aliud cathetum ex utraque parte deductum et punctis *g*, *h* insignitum producemus; eritque linea *eb* lineae *bf*
5 aequalis. Similiter linea *dg* lineae *dh* aequalis ponatur. Est igitur tota linea *ef* et linea *gh* diametro *ac* aequalis. Dehinc duas lineas *eg*, *fh* protrahamus, eritque quadrilaterum *efgh* parte altera longius, cuius unum latus 16, alterum vero 12 ulnas continebit. In cuius, ut supra diximus, embado 192 reperies: est haec multiplicatio 12 in 16. Manifestum est,
10 quod rhumbus *abcd* primo descriptum est medietas istius maioris parte altera longioris in quatuor aequalia quadrilatera divisi, ut inscripta figura monstratur (Fig. 6), in qua rhumbus constat ex quatuor partibus ex quatuor quadrilateribus in duo partitis aequalia. Rhumbus igitur *abcd* istius altera parte longioris, in cuius embado 192 ulnas contineri praediximus,
15 medietatem amplectitur. Quapropter rhumbus *abcd* 96 | ulnis impleri, 5 quod est multiplicatio *be* vel *bf* in *bd*, nulli dubium sit. Item si lineam *ef*, quae est latus minus parte altera longioris, in lineam *fc*, quae est medietas alterius lateris, multiplicaveris, idem prorsus efficies, ut in hac figura describitur.

20 7. Modis igitur investigandi quadratorum ac rhumborum nec non et parte altera longiorum embada manifeste monstratis, quomodo areas rhomboidum vel obliquarum figurarum et diversorum laterum inquiramus, docendum relinquitur, quorum notitiam indicare nequibimus, donec viam inveniendi triangulorum areas edoceamus. ⟨Sed⟩ priusquam triangulorum mensuras ad-
25 grediamur, quasdam quaestiones in praedictorum quadrilaterorum areis tibi proponemus, ut in earum inventione, deo auxiliante, subtilis et promptus investigator existas.

8. Primum igitur, *quanta sit illius tetragoni, in cuius longitudine latitudineque 10 ulnae continentur, diametri longitudo,* quaestio proponatur, cui
30 talis fiat responsio: Huius tetragoni diametrum est radix 200. Si quis enim hoc diametrum ⟨in se ipsum⟩ duxerit, 200 procurabit. Nam in omni tetragono quadratus ab eiusdem diametro contentus eiusdem quadrati duplex

---

2 cathetus. *Des folgenden* aliud *halber muss auch hier das Neutrum stehen.* — 7 longior. — 13 in duo partibus. — 17 minoris. — 18 lateris et. — 21—22 rombydum *A*, rhomboidum *B*. — 22—23 docenda. — 24 Sed *fehlt in A*, et *B*. — 25 quasdam quasdam *A*. — 29 quaestio] quomodo. — 31 in se ipsum *in A über der Zeile ausradiert.* — 32 quadrato.

Diagonalen. Darauf errichte man vom Punkte b aus das Loth nach beiden Seiten und schreibe an die Endpunkte die Buchstaben e, f. Vom Punkte d aus ziehe man dann ebenfalls nach beiden Seiten ein zweites Loth und bezeichne die Endpunkte mit g, h: dann ist die Gerade eb der Geraden bf gleich, und in ähnlicher Weise werde die Linie dg der Linie dh gleich angenommen. Es ist also die ganze Gerade ef und die ganze Gerade gh der Diagonale ac gleich. Wir ziehen nun die beiden Geraden eg, fh, so wird das Viereck $efgh$ ein Rechteck, dessen eine Seite 16, die andere aber 12 Ellen enthält. In dem Flächeninhalte findet man, wie wir oben gesagt haben, 192 Quadratellen, das ist nämlich das Produkt von 12 mal 16. Nun ist klar, dass der zuerst beschriebene Rhombus $abcd$ die Hälfte des grösseren Rechtecks beträgt, das in vier gleiche Vierecke getheilt ist, wie die Figur zeigt (Fig. 6), in der der Rhombus aus vier Theilen der vier Vierecke besteht, von welchen jedes in zwei gleiche Stücke zerschnitten ist. Der Rhombus $abcd$ umfasst also die Hälfte des Rechtecks, dessen Flächeninhalt wir vorher auf 192 Quadratellen feststellten, der Rhombus enthält also unzweifelhaft 96 Quadratellen, das ist aber das Produkt von be oder bf und bd. Würden wir in derselben Weise die Seite ef, das ist die kleinere Seite des Rechtecks, mit der Strecke fc, der Hälfte der andern Seite, vervielfachen, so würde genau dasselbe herauskommen, wie in der beigegebenen Figur ersichtlich ist.

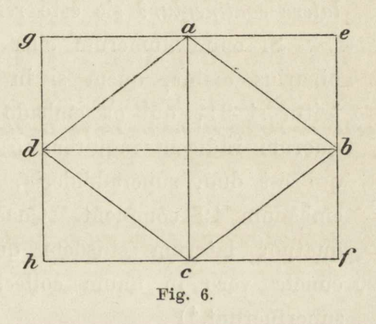


Fig. 6.

7. Nachdem so gezeigt ist, in welcher Art und Weise man die Flächeninhalte der Quadrate, Rhomben und Rechtecke sicher auffinden kann, bleibt noch übrig, zu lehren, wie man die Inhalte der Rhomboide und der andern schiefwinkligen Vierecke mit ungleichen Seiten finden kann. Die Bestimmung derselben vermögen wir aber nicht eher anzugeben, bevor wir nicht den Weg gezeigt haben, auf welchem wir den Flächeninhalt der Dreiecke berechnen können.

Ehe wir aber die Ausmessung der Dreiecke beginnen, wollen wir einige Aufgaben über die Flächeninhalte der vorgenannten Vierecksarten stellen, damit Du in ihrer Lösung mit Gottes Hilfe als ein feiner und tüchtiger Löser Dich darstellst.

8. Zunächst sei folgende Aufgabe gegeben: *Wie gross ist die Länge der Diagonale eines Quadrates, in dessen Länge und Breite 10 Ellen enthalten sind?* Die Antwort darauf ist: Die Diagonale dieses Quadrates ist die Wurzel aus 200. Vervielfacht man nämlich diese Diagonale mit sich selbst, so entsteht 200. Nun ist in jedem Quadrate das über der Dia-

existit, quapropter istius diametrum fore 200 radicem, quod est duplex multiplicationis 10 in 10, manifestum est.[1])

9. Si autem converso modo quaeratur: *Quadrati latus, cuius diametrum 200 ulnarum radix existiterit, quot ulnas in latere continebit?*, quadratum
5 diametri in duo dividens 100 invenies, cuius radix, quae est 10, eiusdem quadrati latus existit.[2])

Quadrati vero diametrum 14 et parum minus septima unius continebit.[3])

10. Item si talis fiat quaestio: *Quadrati embadum, de cuius area omnium*
10 *suorum laterum in unam summam ⟨collectorum⟩ collectum dempseris, si 21 supererint, quot ulnas veraciter continebit, et quot etiam in eiusdem quadrati latere continentur?* sic esto respondere paratus.

Si enim numerum eius laterum, quod est quatuor, in duo diviseris, binarius exibit, quem si in se ipsum duxeris, 4 nimirum invenies. Eis
15 igitur si 21, qui ex embado superest, superadiunxeris, 25 procreabuntur, quorum radicem inquirens 5 reperies, cui si dimidium numerum laterum, qui est duo, superaddideris, 7 efficient, et hoc est latus quadrati, cuius embadum 49 complent. Quaesitor autem ex hoc embado, quod 49 fuit, quatuor laterum eiusdem quantitates minuit, quorum unumquodque 6,
20 cuncta vero in unum collecta 28 continent, et 21, ut idem proposuit, superfuerunt.[4])

Istius autem responsionis veritatem si demonstrationibus scire cupis, praecedens quadratus et super eum *abcd* describatur (Fig. 7), cuius omnia latera sibi invicem sunt aequalia. Et manifestum est, in eorum unoquoque
25 plus quatuor ulnis contineri, eo quod quaesitor post laterum diminutionem aliquid ex embado remanere proposuit. Cumque ita sit, ex linea *ab* lineam | *be*, ex linea vero *cd* lineam *cf*, quarum unaquaeque 4 ulnas in longitudine contineat, abscindamus. Post hoc a puncto *e* ad punctum *f* quandam lineam dirigamus. Dehinc linea *be*, in cuius longitudine 4 ulnae conti- 5′
30 nentur, in duo aequa supra punctum *g* secetur, erintque duae lineae *bg*, *ge* aequales, duas enim ulnas unaquaeque recipit. In hoc itaque quadrato

4 continebunt. — 5 quae] quod *B*. — 9 embadi. — 10 collectorum *habe ich hinzugefügt*. — 13 enim ut eius.

1) Leonardo 58, 6. 2) Leonardo 58, 3 v. u.

3) $\sqrt{200} \sim 14\frac{1}{7}$ ist nach der Regel gefunden $\sqrt{a^2+b} \sim a + \frac{b}{2a}$.

4) Es ist das die Lösung der Gleichung $x^2 - 4x = 21$ oder allgemein $x^2 = ax + b$. Savasorda rechnet $x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$ und beweist dann aus den von Euklides entlehnten Sätzen seine Rechnung. Siehe Leonardo 59, 15 v. u.

gonale beschriebene Quadrat doppelt so gross als das gegebene Quadrat. Es ist daher offenbar $\sqrt{200}$ die Länge der ganzen Diagonale, da 200 das doppelte Produkt von 10 mal 10 ist.[1])

9. Wird aber umgekehrt gefragt: *Wieviel Ellen enthält die Seite des Quadrates, dessen Diagonale gleich der Wurzel aus 200 Ellen ist?*, so findet man durch Division des Quadrates der Diagonale durch zwei 100, und die Wurzel davon, nämlich 10, ist die Seite des Quadrates.[2])

Die Diagonale des Quadrates enthält aber 14 Ellen und eine Kleinigkeit weniger als ein Siebentel einer Elle.[3])

10. Wird ebenso folgende Frage gestellt: *Wenn von dem Inhalte eines Quadrates, von dessen Fläche man die Summe seiner sämmtlichen Seiten weggenommen hat, 21 überbleiben, wieviel Quadratellen enthält es dann, und wieviel Ellen sind zugleich in jeder Seite des Quadrates enthalten?*, so sei zu folgender Antwort bereit.

Wenn man nämlich die Zahl der Seiten, das ist 4, halbiert, so erhält man 2, und diese mit sich selbst vervielfacht ergiebt 4. Addiert man hierzu 21, nämlich das, was von dem Flächeninhalte überblieb, so entstehen 25. Hiervon sucht man die Wurzel und findet 5. Addiert man hierzu die halbe Zahl der Seiten, das ist 2, so macht das 7, und das ist die Seite des Quadrates, dessen Flächeninhalt 49 Quadratellen erfüllen. Der Frager aber verminderte diese Fläche, nämlich 49, um die vier Seiten desselben, von denen jede 7, alle zusammen aber 28 betragen, und es blieben dann 21 übrig, wie er angab.[4])

Will man aber die Richtigkeit der Antwort bewiesen wissen, so verzeichne man das obenerwähnte Quadrat und bezeichne es mit $abcd$ (Fig. 7). Alle Seiten desselben sind dann einander gleich, und es ist klar, dass in einer jeden mehr als 4 Ellen enthalten sein müssen, weil der Fragesteller angiebt, dass nach Wegnahme der Seiten von der Fläche etwas übrig bleiben soll. Deshalb schneiden wir von der Linie ab die Linie be, von der Linie cd aber die Linie cf, jede von 4 Ellen Länge, ab, ziehen dann vom Punkte e nach dem Punkte f eine gerade Linie und theilen darauf die Linie be, deren Länge vier Ellen beträgt im Punkte g in zwei gleiche Theile, dann sind also die Strecken bg, ge einander gleich, denn eine jede enthält zwei Ellen. Damit ist also deutlich bewiesen, dass in

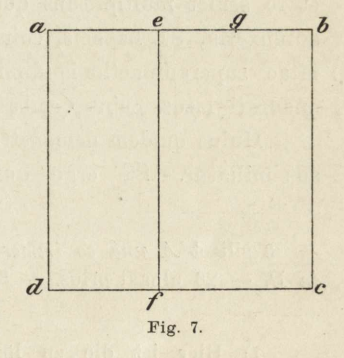


Fig. 7.

manifeste monstratur, quadrilaterum *bcfe* quatuor eiusdem quadrati latera simul collecta continere. Hoc etenim quadrilaterum est multiplicatio lineae *be*, quae est 4 ulnarum, in lineam *bc*, quae quadrati latus existit, scilicet latus, quod cum quater computatur, quatuor laterum summam in unum
5 coadunatam procreabit. Quadrilaterum igitur *bcfe* quatuor quadrati latera simul collecta continebit. Cumque quadrilaterum hoc ex praedicto quadrato minuetur, remanebit quadrilaterum *adfc* 21 ulnarum, et hoc est illius quantitas, quod in quaestione remanere propositum est. Linea igitur *be* in duas aequales partes, quae sunt *bg*, *ge*, dividitur, cui alia in directum
10 recta linea *ea* superadditur. In omni autem recta linea in duo aequa divisa, si ei alia in directum recta linea adiungatur, superficies rectiangula, quae a tota cum adiuncta et ab adiuncta conficitur, cum quadrato, quod a lineae dimidio describitur, quadrato a dimidio et ab adiuncta constanti aequatur. Igitur multiplicatio lineae *ba* in lineam *ea* cum multiplicatione
15 lineae *ge* in se ipsam est ut multiplicatio lineae *ga* in semet ipsam. At multiplicatio lineae *ab* in lineam *ea* est quadrilaterum *adfe*, eo quod unum latus *ad* lateri quadrati aequatur, aliud vero latus *ea* est id, quod lineae *eb* superadiicitur, et huius quadrilateri area 21 continet. Cui si multiplicatio lineae *eg* in se ipsam, quod est 4, superaddatur, 25 procrea-
20 buntur, quod multiplicationi lineae *ga* in se ipsam aequatur. Linea itaque *ga* quinque, quod est radix 25, continet. Cui, scilicet 5, si lineae *bg* summam, quae est duo, superadiunxeris, inde coadunatum 7 efficiet, quod est lineae *ba* quantitas. Embadum autem *abcd* 49 continet, ut subscripta figura repraesentat.

25 **11.** Item si quis hoc obiecerit: *Cum in cuiuslibet quadrati embado suorum quatuor laterum summa superaddita 77 inveneris, quot ulnas in embado continebantur?* dimidium suorum laterum, quod est duo, sumens et in semet multiplicans quatuor invenies. Quod si datae quantitati superadiunxeris, 81 habebis, cuius radicem, quod est 9, accipiens et ex ea prae-
30 fatae superadiunctionis dimidium demens 7 remanebunt, et hoc est illius quadrati latus, cuius ⟨embadum⟩ 49 continet.[1])

Huius quidem demonstratio praedictae demonstrationi, velut subiungitur, ad|similiatur. Sit ergo quadrati latus linea *ab* (Fig. 8), cui quaedam 6

---

3 silicet *A und so immer.* — 4—5 in una in coadunatam. — 8 igitur *fehlt in B.* — 26 ulnas] prius. — 31 embadum *fehlt.*

---

1) Hier ist die zu lösende Gleichung $x^2 + 4x = 77$ oder allgemein $x^2 + ax = b$. Die Lösung des Verfassers ist $x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} - \frac{a}{2}$, welche

diesem Quadrate das Viereck *bcfe* die vier Seiten des Quadrates zusammengenommen enthält. Dieses Viereck ist nämlich das Produkt der Linie *be*, das sind 4 Ellen, mit der Linie *bc*, welche die Seite des Quadrates darstellt, das heisst derjenigen Seite, welche viermal gezählt die Gesammtsumme der vier Seiten hervorbringt. Das Viereck *bcfe* enthält also die vier Seiten des Quadrates zusammengenommen. Zieht man nun dieses Viereck von dem obengenannten Quadrate ab, so bleibt das Viereck *adfe* von 21 Quadratellen übrig, das ist die Grösse, welche in der Aufgabe als überbleibend bezeichnet wurde.

Die Gerade *be* ist also in zwei gleiche Theile, nämlich *bg*, *ge* getheilt, und sie ist um eine andere Gerade *ea* direkt verlängert. Wenn aber eine gerade Linie in zwei Hälften getheilt wird und sie wird um eine andere gerade Linie direkt verlängert, so ist das Rechteck, das aus der ganzen Linie plus der Verlängerung und aus der Verlängerung gebildet wird, zusammen mit dem Quadrate über der Hälfte der Linie gleich dem Quadrate über der Hälfte plus der Verlängerung. Es ist also das Produkt aus der Linie *ba* und der Linie *ea* plus dem Produkt der Linie *ge* mit sich selbst gleich dem Produkt der Linie *ga* mit sich selbst. Das Produkt der Geraden *ab* mal der Geraden *ea* ist das Viereck *adfe*, weil die eine Seite *ad* der Quadratseite gleich ist, die andere Seite *ea* aber die Verlängerung der Seite *eb*, und die Fläche dieses Vierecks ist 21. Addiert man hierzu das Produkt der Linie *eg* mit sich selbst, das ist 4, so entstehen 25, und das ist dem Produkt der Linie *ga* mit sich selbst gleich. Die Linie *ga* ist also 5, nämlich die Wurzel von 25. Vereinigen wir nun mit dieser 5 den Werth der Linie *bg*, der zwei beträgt, so macht die Summe 7, und das ist die Länge der Linie *ba*. Der Flächeninhalt von *abcd* aber beträgt 49, wie in der beigegebenen Figur zu sehen ist.

11. Wenn ferner jemand Folgendes fragte: *Wenn man den Inhalt eines Quadrates und die Summe der vier Seiten zusammenaddiert, und 77 gefunden werden, wieviel Quadratellen enthält dann die Fläche?*, so nimmt man die Hälfte der Seiten, das ist 2, multipliciert sie mit sich selbst, und erhält dann 4. Fügt man das der gegebenen Grösse hinzu, so hat man 81. Davon nimmt man die Wurzel, sie ist 9, und zieht von ihr die Hälfte der obengenannten Hinzufügung ab, so bleibt 7, und das ist die Seite des gesuchten Quadrates, dessen Inhalt 49 Quadratellen enthält.[1])

Der Beweis dafür, wie er unten folgt, ist dem vorhergehenden Beweise ähnlich. Es sei also die Seite des Quadrates *ab* (Fig. 8), die um

---

er wieder aus Sätzen, die er aus Euklides entnommen hat, beweist. Bei Leonardo 59, 5.

linea *bc* quatuor ulnarum superaddatur. Et notum est, quod multiplicatio lineae *ab* in lineam *bc* quatuor laterum quadrati, lineae *ab*, summam continet. Quadrilaterum itaque *bcde*, cuius duae lineae *be*, *cd* lineae *ab*, et cuius linea *de* aequa sit lineae *cb*, constituatur. At si lineam *ed* usque ad punctum *f* aequalem lineae *ca* produxeris, et lineam *af* abstraxeris, quadrilaterum *acdf* quadratum lineae *ab* cum eiusdem quatuor laterum summa in unum collecta continebit, eo quod quadratus *abef* est quadratus lineae *ab*, et quadrilaterum *bcde* est quatuor laterum eiusdem quadrati summa. Totum quadrilaterum *acdf* 77 ulnas recipit, unde, si lineam *bc* in duo aequa supra punctum *g* ⟨diviseris, erit linea *bg* duarum ulnarum. Ergo, quia linea *bc* in duo aequa supra punctum *g*⟩ dividitur, eique linea *ba* in directum superadditur, erit multiplicatio totius lineae *ac*, quod est tota cum adiuncta, in lineam *ab*, quae est superadiunctio, cum quadrato lineae *bg*, quae est primae lineae dimidium, quadrato *ga*, quae est dimidium lineae *bc* cum adiuncta, aequalis; et multiplicatio lineae *ac* in lineam *ab* est quadrilaterum *acdf*, quod est 77. Cui si quadratum *bg*, quod est 4, superadiunxeris, quadratum lineae *ag*, quod est 81, invenies. Linea igitur *ag* erit 9 ulnarum. De qua si lineam *bg*, quae est duarum ulnarum, depresseris, remanebit linea *ab* 7 ulnarum. Area igitur quadrati *abef* erit 49, et haec ⟨est⟩ figura.

12. Haec item alia quaestio proponitur: *Si cuiuslibet quadrati embadum ex suorum quatuor laterum quantitate depresseris, et tria supererunt, quot in eius embado, vel quot in singulis lateribus ulnae continebantur?*

Huius quidem quaestionis solutionem sic invenies. Omnium laterum quadrati summam in duo aequa divides, et duo reperies, ex quorum multiplicatione 4 innascentur. Ex quibus si illa tria, quae supererant, minueris, unus remanebit, cuius radix unus existit. Quem si ex duobus, quod est summa medietatis laterum, depresseris, remanebit unus, et ipse est quadrati latus. Vel si residuam unius radicem ⟨duobus, quod est⟩ dimidium ⟨laterum⟩, superaddideris, 3 colligentur, quae sunt eiusdem quadrati latus.[1]

---

2 lateris. — 3 Quadratum. — 5 aequale. — 9 72 ulnas *A*. — 11—12 diviseris . . . punctum *g in A auf dem Rande ausradiert.* — 14 quadrilatero. — 16 quadratus. — 20 est *fehlt.* — 22 tria] ita. — 29 duobus, quod est *in A über der Zeile ausradiert, ebenso* laterum.

---

1) Lösung der Gleichung $x^2 + 3 = 4x$, allgemein $x^2 + b = ax$. Hier giebt Savasorda die Lösung $x = a \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$ mit Beweis für *beide* Werthe. Leonardo 60, 10 verfährt genau ebenso, was Lösung und doppelten Beweis betrifft. An späterer Stelle zeigt Savasorda auch, dass die Lösung unmöglich ist, sobald $\left(\frac{a}{2}\right)^2 < b$ ist.

eine andere Gerade bc von 4 Ellen verlängert werde. Nun ist bekannt, dass das Produkt der Geraden ab mal der Geraden bc das Vierfache der Quadratseite ab enthält; es möge daher das Viereck $bcde$ beschrieben werden, dessen zwei Seiten be, cd der Seite ab, dessen Seite de aber der Geraden cb gleich ist. Verlängert man jetzt die Gerade ed bis zum Punkte f gleich der Geraden ca, und zieht af, so enthält das Viereck $acdf$ das Quadrat der Geraden ab plus der Summe der vier Seiten desselben zusammengenommen, weil das Quadrat $abef$ das Quadrat über ab, und das Viereck $bcde$ gleich der Summe der vier Seiten dieses Quadrates ist. Das ganze Viereck $acdf$ enthält also 77 Quadratellen. Halbiert man nun die Gerade bc im Punkte g, so ist die Linie bg gleich 2 Ellen, es ist also, da die Gerade bc im Punkte g in zwei gleiche Stücke getheilt ist und um die Gerade ba verlängert wurde, das Produkt der ganzen Linie ac, das ist der getheilten Linie plus der Verlängerung, mal der Linie ab, das ist der Verlängerung, plus dem Quadrate der Linie bg, das ist der Hälfte der ersten Linie, gleich dem Quadrate über ga, das ist die Hälfte der Linie bc plus der Verlängerung. Das Produkt der Geraden ac mal der Geraden ab ist aber das Viereck $acdf$, das ist 77, und wenn man hierzu das Quadrat über bg, das ist 4, hinzufügt, so erhält man das Quadrat der Geraden ag, also 81. Die Gerade ag ist also 9 Ellen. Zieht man davon die Linie bg von 2 Ellen ab, so bleibt die Gerade ab von 7 Ellen übrig. Die Fläche des Quadrates $abef$ ist daher 49, und das ist die zugehörige Figur.

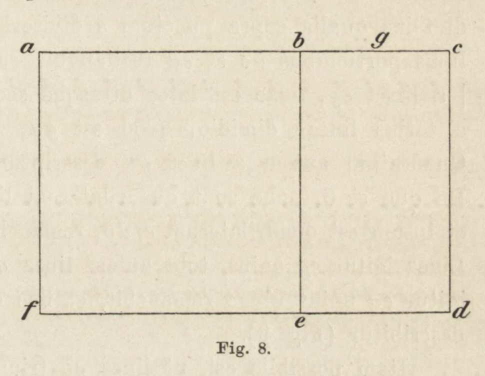


Fig. 8.

12. Es werde ferner folgende Frage vorgelegt: *Wenn man den Flächeninhalt eines Quadrates von der Summe der vier Seiten desselben hinwegnimmt, und drei als Rest bleibt, wieviel Ellen sind dann im Inhalte und wieviel in den einzelnen Seiten des Quadrates enthalten?*

Die Lösung dieser Aufgabe findet man folgendermaassen: Man halbiere die Summe aller Seiten des Quadrates, so findet man 2, durch Multiplikation derselben mit sich selbst entstehen 4. Nimmt man nun hiervon jene drei, welche Rest bleiben sollen, weg, so bleibt eins übrig, deren Wurzel die Einheit ist. Subtrahiert man diese wieder von zwei, das ist der halben Anzahl der Seiten, so bleibt eins als Rest, und das ist die Seite des Quadrates. Oder auch, wenn man die Wurzel der Rest gebliebenen Einheit zu 2, der halben Anzahl der Seiten, addiert, so erhält man 3, und das ist ebenfalls die Seite des Quadrates.[1])

Et ut haec demonstratione probentur, sint quatuor quadrati latera in unum collecta quadrilaterum *abcd*, cuius longitudo linea *ab*, latitudo vero linea *ac* constituatur. Manifestum est igitur, quod linea *ab* 4, quod est omnium laterum numerus, in se continet, et linea *ac* quadrati latus existit.
5 Si ex hoc itaque parte altera longiori quadratum *acfe*, cuius omnia latera lineae *ac* sunt aequalia, depresseris, quadrilaterum *efdb* trium partium remanebit. Quo facto, si lineam ab in duo aequalia supra punctum *g* et duo inaequalia supra punctum *e* diviseris, quae sub totius lineae inaequalibus portionibus *be* et *ea* rectiangula superficies continetur, cum quadrato
10 | a linea *eg*, quae est inter utrasque sectiones, descripto, ei quadrato, quod 6′ a totius lineae dimidio, quod est *ga*, describitur incontanter aequabitur. Quadratum autem a linea *ga* descriptum 4 ulnarum fore nullus ambigit. De quo si 3, quae sunt quadrilaterum lineae *be* in lineam *ea*, depresseris, et ipsum est quadrilaterum *efdb*, remanebit 1, quod est quadratus lineae *eg*.
15 Linea igitur *eg* unius, tota autem linea *ga* duarum existit ulnarum. Linea igitur *ea* unius ulnae remanebit, et hoc est latus quadrati, ut in hac figura describitur (Fig. 9).

Item possibile est, ut linea *eb* trium sit ulnarum, cum linea *gb* duarum et linea *ge* unius ulnae fuerit (Fig. 10), et tamen ipsa *ea* erit alterius
20 quadrati latus. Velut si quantitas quatuor laterum erit superficies parte altera longior *abcd*, de quo quadratum *efdb* demens remanebit quadrilaterum *aefc* trium ulnarum, punctus autem *g*, qui lineam *ab* in duo
25 aequa partitur, cadit super lineam *eb*, quae est unum latus quadrati *efdb*. Et si praedictorum memor exstiteris, linea *eg* unam ulnam continere dicitur. Quare, si lineam *gb*, quae est duarum, superaddideris *ge*, 3 nimirum
30 efficies, et haec est longitudo lineae *eb*, ⟨quae⟩ quadrati latus existit, eo quod haec et omnes eius consimiles quaestiones ad duo pervenient. Veluti si ab aliquo proponitur, *quod, cum embadum ex suorum quatuor laterum quantitate proicitur, et* 4 *minus quarta remanserit, quot in sui quantitate, et quot in singulis lateribus mensuras continebantur,* huius quidem quadrati latus aut unam et
35 dimidiam vel duas mensuras et dimidiam continebit, et haec est figura secunda.

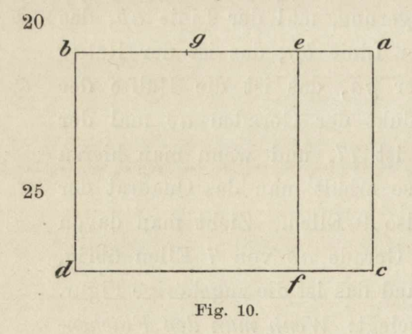


Fig. 10.

13. Quaestionibus quadratorum explicatis ad figurarum parte altera longiorum quaestiones transeamus.

---

10 a] autem. — 19 ipsa eadem. — 23 quadratum. — 30 quae *in A über der Zeile ausradiert.*

Damit nun dies durch Beweis bekräftigt werde, seien die vier Seiten des Quadrates zusammengenommen das Viereck *abcd*, dessen Länge durch die Gerade *ab*, die Breite aber durch die Linie *ac* dargestellt werde. Dann ist klar, dass die Gerade *ab* 4 in sich enthält, was die Anzahl aller Seiten ist, die Gerade *ac* aber ist die Seite des Quadrates. Nimmt man von diesem Rechteck das Quadrat *acfe* weg, dessen Seiten sämmtlich der Geraden *ac* gleich sind, so bleibt das Viereck *efdb* von drei Ellen übrig. Halbiert man nun die Linie *ab* im Punkte *g* und theilt sie zugleich in zwei ungleiche Stücke im Punkte *e*, so ist das Rechteck, das zwischen den beiden ungleichen Theilen *be* und *ea* der ganzen Linie enthalten ist, plus dem Quadrate über der Linie *eg*, welche zwischen den beiden Theilpunkten enthalten ist, gleich dem Quadrate, das über der Hälfte der ganzen Linie, das ist über *ga*, beschrieben wird. Das Quadrat über der Linie *ga* ist aber ohne Zweifel gleich 4 Quadratellen. Nimmt man hiervon 3, die das Rechteck aus der Linie *be* und der Linie *ea* darstellt, weg, das ist das Rechteck *efdb*, so bleibt 1 übrig, das Quadrat der Geraden *eg*. Die Gerade *eg* enthält also eine, die ganze Gerade *ga* zwei Ellen, es bleibt daher für die Gerade *ea* eine Elle übrig, und das ist die Seite des Quadrates, wie in der nebenstehenden Figur gezeigt wird (Fig. 9).

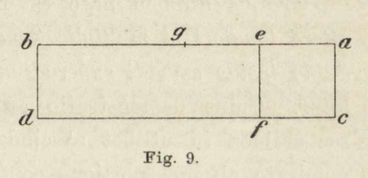


Fig. 9.

Es ist aber auch möglich, dass die Gerade *eb* drei Ellen lang ist, während die Gerade *gb* zwei, und die Gerade *ge* eine Elle beträgt (Fig. 10), und trotzdem ist dann *ea* die Seite eines andern Quadrates. Es stelle z. B. das Rechteck *abcd* die Summe der vier Seiten dar. Nimmt man von diesem das Quadrat *efdb*, so bleibt das Viereck *aefc* von drei Quadratellen übrig, der Punkt *g* aber, der die Gerade *ab* hälftelt, fällt auf die Gerade *eb*, welche eine Seite des Quadrates *efdb* ist. Wenn man sich nun an das oben Gesagte erinnert, so muss man sagen, die Linie *eg* enthalte eine Elle. Addiert man also die Gerade *gb*, die zwei Ellen enthält, hinzu, so macht das 3 Ellen, und das ist die Grösse der Linie *eb*, welche die Seite des Quadrates darstellt. Diese und alle ähnlichen Aufgaben kommen auf zwei Lösungen hinaus. Wenn z. B. von Jemandem gefragt wird: *Wenn der Flächeninhalt von der Summe der vier Seiten weggenommen wird, und* 4 *weniger* $^1/_4$ *überbleibt, wieviel in seinem Inhalte und wieviel Längeneinheiten in den einzelnen Seiten enthalten sind,* so wird die Seite dieses Quadrates entweder ein und eine halbe oder zwei und eine halbe Längeneinheit enthalten, und hierher gehört die zweite Figur.

13. Nachdem wir die Aufgaben über Quadrate erläutert haben. wollen wir zu Fragen über Rechtecke übergehen.

Si quis: *In diametro illius parte altera longioris, cuius unum latus 8, alterum vero 6 continet, quot ulnae continentur?* quaestionem fecerit, utrumque duorum ipsius laterum in semet multiplica, et duorum embadorum simul collectorum radicem addisce, quodque inveneris, erit diametrum. In hac namque parte altera longiore si 8 in semet duxeris, ⟨64 efficies⟩; 6 etiam si in se ipsum multiplicaveris, 36 invenies, quae in unum collecta 100 perficient, cuius radix est 10, quod est huius parte altera longioris diametrum.[1]

14. *Aliter etiam hoc diametrum invenire poteris;* 8 scilicet, quod est unum latus, in 6, quod est alterum, multiplica, et erit embadum 48. Istius autem embadi duplum sunt 96, cui si binarii multiplicationem, hoc est id, quod inter utrumque latus continetur, superaddideris, 100 perficies, cuius radix, ut praediximus, sunt 10, quod est huius parte altera longioris diametrum.

Huius quidem haec est regula certissima, quod *in omni figura parte altera longiori si multiplicationem illius, quod inter utrumque latus continetur, duplo ipsius embadi superadiunxeris, inde collectum quadrato diametri aequabitur.* Cuius demonstratio ex hac, quae subiungitur, regula procedit: Si recta linea in utlibet abscindatur, qui a tota | quadratus describitur cum quadrato ab una portione constituto, aequus est duplo rectanguli, quod sub tota et praedicta portione continetur, et ei quadrato, quod ab altera portione describitur.[2]

15. Item quaeritur: *Si in parte altera longiore, cuius diametrum 10 ulnarum fuerit, longitudo latitudinem superaverit in duobus, quot in longitudine et latitudine, quot et in embado continebit?*

Solutio. Quoniam istius parte altera longioris ⟨diametri quadrati⟩ embadum 100 fore non ambigis, si illius ⟨quadrati⟩ embadum, in quo longitudo latitudinem superat, quod est 4, ex ipso proieceris, 96 relinquuntur. Quibus in duo divisis 48 reperies, et hoc est istius parte altera longioris embadum. Quod si eiusdem latera nosse desideras, id, in quo longitudo latitudinem excedit in duo partire, et unus exibit, cuius embadum est unus. Quod si parte altera ⟨longioris⟩ embado superaddideris, 49 nimirum invenies, cuius radix est 7. Qui si unum, quod est superationis dimidium, superadiunxeris, 8 reperies, et hoc ⟨est⟩ longitudinis latus. Si autem ex

---

2—3 utrique. — 5 64 efficies *in A über der Zeile ausradiert.* — 26 diametri quadrati *fehlt.* — 27 quadrati *fehlt.* — 32 altera embadi *A*, longioris *fehlt auch in B.* — 33 superatoris. — 34 est *fehlt.*

Würde jemand fragen: *Wieviel Ellen sind in der Diagonale eines Rechteckes enthalten, dessen eine Seite 8, die andere aber 6 enthält?*, so multipliciere man jede der beiden Seiten desselben einzeln mit sich selbst und suche, nachdem man die beiden Flächeninhalte zusammenaddiert hat, die Wurzel, das Ergebnis ist die Diagonale. In dem vorliegenden Rechtecke entsteht aus 8 mit sich selbst vervielfacht 64, ebenso findet man durch Multiplikation von 6 mit sich selbst 36. Beides zusammen macht 100, davon ist die Wurzel 10, und das ist die Diagonale dieses Rechtecks.[1])

14. *Diese Diagonale kann man auch auf andere Weise finden.* Multipliciert man nämlich 8, das ist die eine Seite, mit 6, das ist die andere, so entsteht der Flächeninhalt 48. Das Doppelte des Inhalts ist also 96. Addiert man hierzu das Quadrat von 2, das ist von dem Unterschied zwischen den beiden Seiten, so erhält man 100, und hiervon ist, wie wir oben sagten, die Wurzel gleich 10, und das ist die Diagonale des Rechtecks.

Es ist nämlich die absolut sichere Regel hierfür: *Wenn man in einem Rechteck das Quadrat des Unterschiedes zwischen den beiden Seiten dem doppelten Inhalte hinzufügt, so ist die Summe dem Quadrate der Diagonale gleich,* und der Beweis folgt aus folgendem Lehrsatze:

Wenn eine gerade Linie beliebig getheilt wird, so ist das Quadrat über der ganzen Linie plus dem Quadrate über dem einen Theile gleich dem doppelten Rechtecke, das aus der ganzen Linie und besagtem Theile gebildet wird, plus dem Quadrate über dem andern Theile.[2])

15. Es werde ferner gefragt: *Wenn in einem Rechtecke, dessen Diagonale 10 Ellen beträgt, die Länge die Breite um 2 übertrifft, wieviel Ellen enthält dann die Länge, wieviel die Breite, und wieviel Quadratellen der Flächeninhalt?*

Auflösung. Da die Fläche des Quadrates über der Diagonale dieses Rechteckes unzweifelhaft 100 beträgt, so bleibt, wenn man davon das Quadrat des Unterschiedes zwischen Länge und Breite, das ist 4, wegnimmt, 96 übrig. Halbiert man dies, so findet man 48, und das ist der Inhalt des Rechtecks. Will man nun die Seiten desselben finden, so halbiert man den Unterschied der Seiten und erhält so die Einheit, davon ist das Quadrat eins. Addiert man jetzt dieses zu dem Inhalte des Rechtecks, so erhält man 49, und hiervon ist die Wurzel 7. Hierzu eins, das ist die Hälfte des Unterschiedes, addiert, findet man 8, und das ist die Länge. Nimmt

1) Leonardo 66, 18.

2) Das kommt auf die Beziehung hinaus:

$$a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab.$$

eadem scilicet radice unum dempseris, 6 remanebunt, quod est latus latitudinis. Multiplicatio vero 8 in 6 48, quod est embadum, procurabit.[1])

Hoc quidem hac demonstratione firmatur. Esto igitur parte altera longior *abcd* (Fig. 11), cuius diametrum *ad* sit 10 ulnarum ut praediximus, et manifestum est, quod longitudo, quae est latus *ab*, latitudinem, quae est *ac*, superat in duobus. Nos autem per alios duos numeros huius parte altera longioris embadum et singulorum laterum quantitatem invenire quaerimus. Et notum est, quod multiplicatio lineae *ab* in lineam *ac* totum continet embadum. Multiplicatio vero diametri in se ipsum duplo totius embadi cum quadrato illius, in quo longitudo latitudinem excedit, aequatur, ut in praecedenti quaestione monstravimus. Quapropter, si ex quadrato diametri, qui 100 in se continet, quadratum superationis, quod est 4, depresseris, 96, quod est duplum embadi, relinquentur, cuius dimidium, quod est 48, totum embadum complet. Ac si laterum quantitates scire volueris, quia longitudinem in duobus latitudinem superare cognoveris, ex linea *ab*, quae est longitudo, deme ⟨latitudinem, quae est *ac*⟩, et relinquetur linea *ea* duarum ulnarum, quod est id, in quo longitudo latitudinem superat. Quam si in duo aequa supra punctum *f* diviseris, unaquaeque duarum linearum *ef*, *fa* unius ulnae fore iudicabitur. Et quia linea *ea* in duo aequa supra punctum *f* dividitur, eique alia recta linea, quae est *be*, in directum adicitur, multiplicatio totius lineae *ab*, quae est tota cum adiuncta, in lineam | *be*, quae est adiuncta, cum quadrato, quod a linea *fe*, quae est dimidium, describitur, quadrato lineae *fb*, quae est cum adiuncta dimidium, aequabitur. Ast multiplicatio lineae *ab* in lineam *be* est parte altera longior *abcd*, quod est 48, eo quod linea *eb* aequa est lineae *ac*, quae est latus latitudinis, et quadratus lineae *ef* est unus. Quare, si eas coniunxeris, 49 perficies, quod aequum est quadrato lineae *fb*. Linea igitur *fb* 7, quod est radix 49, continet. Cui radici si lineam *fa*, quae est unus, superadiunxeris, erit tota *ab* 8, quod est parte altera longioris longitudo. Si autem ex ea, scilicet radice, lineam *fe*, quae similiter est unus, abstuleris, remanebit linea *eb* 6, latitudini parte altera longioris, quae est *ac*, aequalis. Multiplicatio vero longitudinis in latitudinem embadum perficit, ut haec figura declarat.

12 superatoris. — 15 quia] qui *A*. — 16 latitudinem, quae est *ac in A über der Zeile ausradiert*. — 18 unamque. — 29—30 longitudo, scilicet radicem. Si autem ex ea lineam.

1) Leonardo 64, 3. Lösung der Gleichungen $x^2 + y^2 = a^2$, $x - y = b$. Savasorda's Lösung ist: $xy = \frac{a^2 - b^2}{2}$; $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$; $\frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y) = x$; $\frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2}(x-y) = y$.

man aber von derselben Wurzel eins weg, so bleiben 6, und das ist die Breite. Das Produkt von 8 mal 6 giebt 48, und das ist der Inhalt.[1])

Das kann man folgendermaassen beweisen: Das gegebene Rechteck sei *abcd* (Fig. 11), dessen Diagonale *ad*, wie wir oben sagten, 10 Ellen betrage. Nun ist klar, dass die Länge, nämlich Seite *ab*, die Breite, nämlich *ac*, in 2 übertrifft. Wir wollen aber durch diese beiden Zahlen den Flächeninhalt und die Länge der einzelnen Seiten des Rechteckes bestimmen. Nun weiss man, dass das Produkt der Linie *ab* mit der Linie *ac* den ganzen Inhalt ausmacht, das Produkt der Diagonale mit sich selbst ist aber, wie wir in der vorhergehenden Aufgabe gezeigt haben, gleich dem doppelten Flächeninhalte plus dem Quadrate des Unterschiedes zwischen Länge und Breite. Wenn man also vom Quadrate der Diagonale, das 100 beträgt, das Quadrat des Unterschiedes, das ist 4, abzieht, so bleibt 96, und das ist der doppelte Inhalt. Seine Hälfte, nämlich 48, ist dann der Inhalt selbst. Will man aber die Länge der Seiten kennen, so schneide man von der Geraden *ab*, das ist der Länge, die Breite ab, nämlich *ac*, dann bleibt, weil man weiss, dass die Länge die Breite in zwei übertrifft, die Strecke *ea* gleich 2 Ellen übrig, das ist eben der Unterschied zwischen Länge und Breite. Theilt man nun diesen im Punkte *f* auf die Hälfte, so ist jede der beiden Geraden *ef*, *fa* gleich einer Elle. Nun ist die Gerade *ea* im Punkte *f* in zwei gleiche Theile getheilt und um eine andere Gerade, nämlich *be*, verlängert, folglich ist das Produkt der Gesammtgeraden *ab*, das ist die ganze Linie plus der Verlängerung, mal der Geraden *be*, der Verlängerung, plus dem Quadrate über der Linie *fe*, der Hälfte, gleich dem Quadrate der Geraden *fb*, das ist der Verlängerung plus der Hälfte. Es ist aber das Produkt der Geraden *ab* mal *bc* das Rechteck *abcd* also 48, weil die Gerade *eb* gleich der Geraden *ac*, das heisst der Breite, ist, und das Quadrat der Geraden *ef* ist eins. Addiert man also, so erhält man 49, und das ist dem Quadrate der Geraden *fb* gleich. Die Strecke *fb* enthält also 7, die Wurzel von 49. Fügt man hierzu die Gerade *fa*, welche eins ist, so ist die ganze *ab* gleich 8, das ist die Länge des Rechtecks. Wenn man aber von jener Wurzel die Länge *fe*, die ebenfalls eins ist, wegnimmt, so bleibt die Gerade *eb* gleich 6 übrig, und sie ist der Breite des Rechtecks, nämlich der Geraden *ac* gleich. Das Produkt aus Länge und Breite aber giebt den Inhalt, wie in der Figur gezeigt wird.

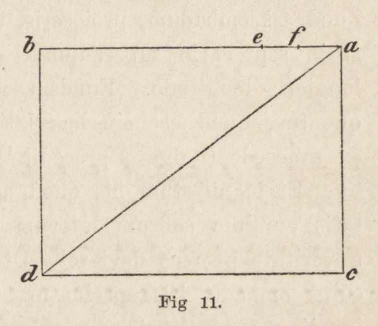


Fig 11.

16. *Item in longitudine latitudineque illius parte altera longioris, cuius embadum 48, longitudo vero cum latitudine sibi copulata 14 continet, quot ulnae continentur?*

Solutio. Si dimidium 14 in se ipsum multiplicaveris, et ex collecto 48, 5 quod est embadum, proieceris, unus remanebit, cuius radix est unus. Quem si in septenario superadiunxeris, 8 reperies, quod est huius parte altera longioris longitudo. Eundem autem si ex septenario depresseris, 6 relinquentur, quod est eiusdem latitudo. Huius nempe solutionis demonstratio ex praecedenti figura procedit.[1])

10 Et manifestum fit, quod, qui alicuius embadum multiplicatione medietatis omnium suorum laterum in simul collectorum maius existere dixerit, a veritate prorsus deviaret. Ut exempli causa si parte altera longiorem, in cuius embado 48 reperiuntur, in sui longitudine latitudineque simul coniunctis 13 contineri quis affirmaverit, veritatem penitus inculcabit, eo quod 15 ipsius laterum medietas 6 et dimidium continet, cuius multiplicatio est 42 et quarta, ⟨quod⟩ embadi quantitate, quod est 48, minus existit. Illud igitur esse non posse probatio esto.[2])

17. Item si, *quot in parte altera longioris embado, cuius diametrum cum altero suorum laterum 18, alterum vero latus 6 ulnas continet, et quot in* 20 *eius diametro, et quot etiam in illo latere, quod cum diametro numeratur, ulnae contineantur,* quaesitum fuerit, notum latus in se ipsum multiplica, indeque collectum per diametri quantitatem alteri copulatam, quod est 18, partire, quodque exierit, erit duo. Quae si 18 superaddideris, 20 provenient, cuius dimidium, quod est 10, diametri quantitatem efficiet. Quod 25 autem ex 18 remanserit, et sunt 8, alterum latus erit. Multiplicatio vero 8 in senarium embadum perficit.[3])

Horum | quippe demonstratio patebit sic. Parte altera longior *abcd* 8 constituatur (Fig. 12), cuius diametrum sit *ac*, ignotum vero latus *ad*, notum autem *dc*. Post hoc centro *a*, spatio vero *ac* circulus *ecf* circinetur. 30 Quo facto linea *ad* ex utraque parte usque ad duo circumferentiae puncta

2 continet] remanet. — 3 continetur. — 7 longitudo] latitudo. — 10 fit] sit. — 16 quod *fehlt.* — 17 posse] potest. — 22 indeque *B*, summam *A*. — 23 exit *A*. — 24 dimidium *B*, diametrum *A*.

1) Leonardo 63, 11 v. u. Hier sind die Gleichungen: $x^2 + y^2 = a^2$, $x + y = b$. Die Lösung dem Vorhergehenden entsprechend $xy = \frac{b^2 - a^2}{2}$; $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$; $x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y)$; $y = \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2}(x-y)$.

2) Hierin liegt die schon oben erwähnte Erkenntnis, dass im dritten Falle der quadratischen Gleichungen die Lösung für $\left(\frac{a}{2}\right)^2 < b$ unmöglich wird.

16. Ebenso: *Wieviel Ellen sind in der Länge und Breite jenes Rechtecks enthalten, dessen Inhalt 48, und in dem die Summe aus Länge und Breite 14 ist?*

Auflösung. Multipliciert man die Hälfte von 14 mit sich selbst, und subtrahiert von dem Quadrate den Inhalt 48, so bleibt eins übrig, dessen Wurzel eins ist. Addiert man dies zu obiger 7, so findet man 8, die Länge des Rechtecks. Dieselbe eins von 7 weggenommen, lässt 6 als Rest, und das ist die Breite. Der Beweis dieser Auflösung folgt aus der vorhergehenden Figur.[1])

Es ist auch klar, dass jemand, welcher behaupten würde, es könne in einem Recktecke der Flächeninhalt grösser sein als das Quadrat der Hälfte aller Seiten zusammengenommen, etwas absolut Falsches aussagen würde. Wenn z. B. jemand sagte, in einem Rechtecke vom Inhalte 48 betrage Länge und Breite zusammengenommen 13, so würde er der Wahrheit geradezu in's Gesicht schlagen, denn da die Hälfte der Seiten $6\frac{1}{2}$ beträgt, und davon das Quadrat $42\frac{1}{4}$ enthält, so ist dasselbe kleiner als der Inhalt, nämlich als 48. Dass das also nicht möglich ist, möge so gezeigt sein.[2])

17. Wird ferner gefragt: *Wieviel Quadratellen enthält der Inhalt eines Rechtecks, dessen Diagonale plus einer der beiden Seiten 18 Ellen, die andere Seite aber 6 Ellen beträgt, und wieviel Ellen sind in der Diagonale und wieviel in der Seite enthalten, welche mit der Diagonale zusammengerechnet war?*, so vervielfache man die bekannte Seite mit sich selbst, und theile das Quadrat durch die Summe aus der Diagonale und der andern Seite, das ist durch 18, der Quotient wird 2. Das addiere man zu 18, dann kommen 20, und die Hälfte davon, also 10, macht die Länge der Diagonale aus, was aber von 18 übrig bleibt, das ist 8, ist die andere Seite. Das Produkt von 8 und 6 giebt den Inhalt.[3])

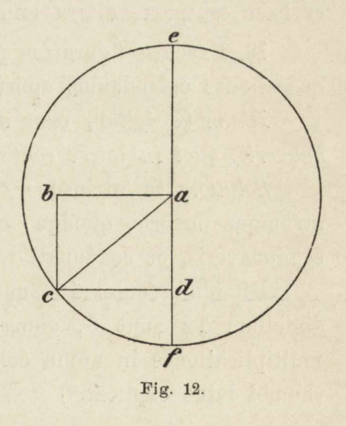


Fig. 12.

Der Beweis hiervon wird folgendermaassen klar. Es werde das Rechteck $abcd$ gezeichnet (Fig. 12), dessen Diagonale ac, die unbekannte Seite aber ad sei, die bekannte Seite jedoch dc. Nun beschreibe man um a als Mittelpunkt mit der Zirkelöffnung ac den Kreis cef, und verlängere dann ad nach beiden Seiten bis zu den beiden Punkten des Umfanges e, f, dann ist die Gerade ae der Diagonale ac gleich, da jede von ihnen vom Mittelpunkte nach dem Umfange gezogen ist. In der Aufgabe wird aber die

3) Leonardo 65, 4. Savasorda benutzt die Gleichung $y^2 = d^2 - x^2 = (d+x)(d-x)$ um durch Division durch $d+x$ den andern Faktor $d-x$ zu erhalten, wodurch er dann sowohl d als x findet.



e, *f* extendatur, eritque linea *ae* ⟨semi⟩diametro *ac* aequalis, quia a centro in circumferentiam utraque trahitur. In quaestione vero linea *ac* cum linea *ad* 18 ulnarum ponitur: tota igitur linea *cd* erit 18, tota vero linea *ef* est circuli diameter. Et ut in propositis universalibus monstratur, manifestum est, quod multiplicatio lineae *ed* in lineam *df*, quae diametrum perficit, est ut multiplicatio lineae *dc* in se ipsam, eo quod ipsae sunt duae lineae sese in eodem circulo secantes, quarum altera per centrum protrahitur. Quapropter, si lineam *dc* in se ipsam multiplicaveris et per lineam *ed* diviseris, exibit linea *df*, eritque duarum ulnarum. Tota vero linea *ef* erit 20, cuius medietas est linea *ae* diametro *ac* parte altera longioris aequalis. Ipsum igitur 10 ulnas continebit, remanebitque ignota linea *ad* 8, ut in hac subscripta figura deprehenditur.

18. Item si quaeratur: *Quot in quolibet latere figurae parte altera longioris ulnae, cuius diametrum 13, embadum vero 60 fuerit, continentur?* eius embadum duplicans 120 reperies. Quod si ex multiplicatione praedicti diametri in se ipsum, quod est 169, proieceris, 49 remanebit. Cuius radicem accipiens 7 invenies, et ipsum est superfluum, quod inter duo parte altera longioris latera continetur. Quod si in duo aequa diviseris, et dimidium in se ipsum multiplicaveris, inde coadunatum 12 ⟨et⟩ quartam efficiet, quod si embado parte altera longioris superaddideris, 72 et quarta colligentur. Cuius radicem, quae est 18 et dimidium, assumens si dimidio praedicti superflui, quod est tres et dimidium, superadiunxeris, 12 invenies, et haec est parte altera longioris longitudo.[1])

19. Executis figurarum parte altera longiorum quaestionibus rhumborum quaestiones ostendamus oportet.

Rhumbus igitur, cum alterum diametrum 16, alterum vero 12 ulnas habuerit, quot in latere continebit?

Solutio. Si utriusque diametri dimidium sumpseris, et in se ipsum utrumque duxeris, quodque ex utraque multiplicatione provenerit, in unum coadunaveris, et coadunati radicem acceperis, rhumbi latera reperies.

Dimidium enim 16 sunt 8, quorum in semet multiplicatio sunt 64; dimidium 12 sunt 6, quorum multiplicatio 36 efficiet. Hae autem duae multiplicationes in unum collectae 100 perficiunt, cuius radix | est 10, quod rhumbi latus explicat.[2])

---

1 semi *fehlt.* — 1—2 quia a centro] et g .\· *und am Rande* ·/. ad centro *A.* — 2 circumferentia. — trahuntur. — 9 ulnarum] linearum. — 14 continetur. — 15 embadus. — 16 ipsis. — 19 et *fehlt.* — 21 assumes.

---

1) Leonardo 64, 23. Man hat hier $x^2 + y^2 = a^2$, $xy = b$ und kann also

Gerade *ac* plus der Geraden *ad* gleich 18 Ellen gesetzt, folglich ist die Gesammtlinie *ed* gleich 18, die ganze Linie *ef* aber ist der Kreisdurchmesser. Wie nun in den allgemeinen Lehrsätzen gezeigt wurde, ist klar, dass das Produkt aus der Geraden *ed* und der Geraden *df*, welche die erste zum Durchmesser ergänzt, gleich dem Produkte der Geraden *dc* mit sich selbst ist, denn es sind zwei Gerade, welche sich innerhalb desselben Kreises schneiden, und deren eine durch den Mittelpunkt gezogen ist. Wenn man also die Linie *dc* mit sich selbst vervielfacht und das entstehende Quadrat durch die Gerade *ed* theilt, so kommt die Linie *df*, und sie wird gleich 2 Ellen sein. Die ganze Gerade *ef* wird daher 20, und ihre Hälfte ist *ae* und der Diagonale *ac* des Rechteckes gleich. Diese enthält also 10 Ellen, und es bleiben für die unbekannte Seite *ad* 8 übrig, wie man in der nebenstehenden Figur sehen kann.

18. Wenn ferner gefragt würde: *Wieviel Ellen fasst jede Seite eines Rechteckes, dessen Diagonale 13 Ellen, der Inhalt aber 60 beträgt?*, so fände man nach Verdoppelung des Inhaltes 120. Zieht man das von dem Quadrate der vorgenannten Diagonale, nämlich 169, ab, so bleibt 49. Als dessen Wurzel findet man 7, und das ist der Unterschied, der zwischen den beiden Seiten des Rechteckes enthalten ist. Nach Halbierung desselben und Quadrierung der Hälfte beträgt das Ergebnis $12\frac{1}{4}$. Addiert man das zu dem Inhalte des Rechtecks, so kommt $72\frac{1}{4}$. Nimmt man hiervon die Wurzel, die $8\frac{1}{2}$ beträgt, und fügt sie zu der Hälfte des vorgenannten Überschusses, das ist zu $3\frac{1}{2}$, hinzu, so erhält man 12, und das ist die Länge des gesuchten Rechtecks.[1])

19. Nachdem so die Aufgaben über das Rechteck beendigt sind, müssen wir Aufgaben über den Rhombus behandeln.

Wieviel Ellen wird also die Seite eines Rhombus enthalten, dessen eine Diagonale 16, die andere aber 12 Ellen umfasst?

Auflösung. Wenn man die Hälfte jeder Diagonale mit sich selbst vervielfacht und die beiden entstehenden Quadrate addiert, dann die Wurzel der Summe sucht, so findet man die Seite des Rhombus. Die Hälfte von 16 ist nämlich 8, ihr Quadrat ist 64; die Hälfte von 12 ist 6, ihr Quadrat 36. Diese beiden Quadrate machen zusammen 100. Davon ist die Wurzel 10, und das ist die gesuchte Seite des Rhombus.[2])

---

wie früher rechnen: $(x-y)^2 = a^2 - 2b$; $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$; $x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$; $y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$.

2) Leonardo 74, 19. Es ist: $s^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$.

20. *Item rhumbus est, ⟨cuius⟩ embadum 96, alterumque duorum diametrorum 16 continet. Quot in altero diametro mensuras habebit?*

Huius quidem quaestionis modus solvitur sic. Si 96, quod est embadum, per diametri quantitatem, quod est 16, divideris, et quod ex divi-
5 sione exierit, duplicaveris, sex etenim, quod est alterius diametri dimidium, ex divisione proveniet, cuius duplum 12 reddit, quod est alterum diametrum.

21. Hac autem quaestiones et consimiles quaestionibus in figuris parte altera longioribus enarratis assimiliantur, quarum demonstrationes ex demon-
10 strationibus in quaestionibus illis explanatis attrahuntur.[1])

His igitur breviter explicatis, priusquam rhumboidum et obliquarum figurarum dimensiones ostendamus, ad triangulorum mensuras, quibus istarum figurarum embada facile demonstrantur, transitum faciamus.

Explicit secundi capituli pars prima,
15 *incipit secunda ⟨in⟩ triangulorum dimensionibus.*

1. Quoniam, ut in huius libri exordio monstratur, triangulorum quidam sunt aequilateri, quidam sunt aequicrurii, quidam vero diversorum laterum, primum aequilaterorum dimensiones explanemus; et ipsi sunt, quorum omnes anguli acuti sunt et sibimet invicem aequales.

20 **2.** *Cuiuslibet autem triangulorum embadum est totius perpendicularis ipsius in eiusdem basis dimidium, vel totius basis in perpendicularis dimidium multiplicatio,* quapropter perpendicularis ⟨quantitatem⟩, quae a puncto sui casus supra basim addiscitur, adinveniamus oportet.[2]) Et quia istorum triangulorum latera sibimet sunt aequalia, eorum perpendiculares supra
25 suarum basium dimidium cadere necesse est, ideoque, si unum latus in se ipsum duxeris, et ex collecto multiplicationem dimidii eiusdem lateris abstuleris, residuique radicem acceperis, quantitatem perpendicularis incontanter invenies.

Ad cuius evidentiam esto triangulus *abc* (Fig. 13), cuius unumquod-
30 que latus 10 ulnas contineat. Istius itaque trianguli aream si nosse desideras, unum latus, quod est 10, in se ipsum multiplicans 100 invenies. De quibus si quinarii, quod est eiusdem lateris dimidium, multiplicationem,

---

1 cuius *fehlt.* — 3 sic] silicet. — 4 divideris *B*, dividens *A*. — 11 Hiis *und so immer.* — rumbonum *A*. — 16—17 quaedam *dreimal.* — 20 est embadum est. — 21 perpendiculariter *B*. — 22 quantitatem *fehlt.* — 23 basem *A und so in den ersten zwei Kapiteln immer, dann* basim. — 24 supra] sunt. — 27—28 incontanter] eius tantum *A*. — 32 quod est] quoque.

---

1) Leonardo 74, 21. 2) Leonardo 30, 43 und 34, 4.

20. Ferner: *Es ist ein Rhombus gegeben, dessen Inhalt 96, und die eine der beiden Diagonalen 16 enthält. Wieviel Maasseinheiten besitzt die andere Diagonale?*

Die Lösung dieser Frage ergiebt sich in folgender Weise, dass man nämlich 96, das ist den Inhalt, durch die Länge der Diagonale, also 16, dividiert, das Ergebnis der Division aber verdoppelt. Aus der Division ergiebt sich nämlich 6, das ist die Hälfte der zweiten Diagonale, und das Doppelte liefert 12, das ist die andere Diagonale.

21. Diese und gleichartige Fragen sind denen ähnlich, welche bei den Rechtecken dargelegt sind; ihre Beweise werden den Beweisen gemäss geführt, die bei jenen Aufgaben auseinandergesetzt sind.[1])

Nachdem dies also in Kürze dargelegt ist, werden wir, bevor wir die Ausmessung der Rhomboide und der andern schiefwinkligen Figuren zeigen, zu der Ausmessung der Dreiecke übergehen, durch welche die Inhalte dieser Figuren leicht gefunden werden können.

Ende des ersten Theiles des zweiten Kapitels
und Beginn des zweiten Theiles: Die Ausmessung der Dreiecke.

1. Da, wie im Eingange dieses Buches gezeigt ist, die Dreiecke in gleichseitige, in gleichwinklige und in ungleichseitige zerfallen, wollen wir zunächst die Ausmessung der gleichseitigen auseinandersetzen. Es sind dies solche, deren sämmtliche Winkel spitz und unter einander gleich sind.

2. *Der Inhalt jedes Dreiecks ist aber das Produkt der ganzen Höhe mit der Hälfte der Grundlinie desselben, oder das der ganzen Grundlinie mit der Hälfte der Höhe.*

Wir müssen daher den Betrag der Höhe, welche durch den Endpunkt ihrer Projektion *(casus)* auf die Grundlinie gefunden wird, bestimmen.[2]) Da nun die Seiten dieser Art Dreiecke unter einander gleich sind, so müssen ihre Höhen in die Mitten ihrer Seiten eintreffen. Wenn man also eine Seite mit sich selbst vervielfacht, und von dem Ergebnis das Quadrat der Hälfte derselben Seite abzieht, von dem Reste aber die Wurzel nimmt, so findet man ohne Weiteres die Länge der Höhe.

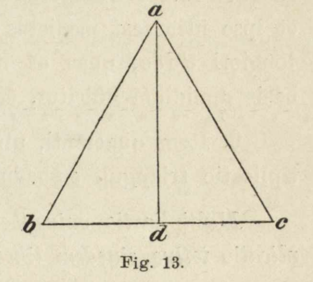


Fig. 13.

Zum Augenscheine sei das Dreieck abc (Fig. 13) gegeben, von welchem jede Seite 10 Ellen enhält. Will man also dieses Dreiecks Flächeninhalt finden, so multipliciert man eine Seite, das ist 10, mit sich selbst, und findet 100. Zieht man hiervon das Quadrat von 5, der Hälfte der Seite, nämlich 25 ab, so bleiben 75,

quae est 25, subtraxeris, 75 remanebunt, quorum radix perpendicularis quantitatem indicat. Multiplicatio radicis 75, quae 8 et modicum minus duabus tertiis in se continet[1]), in 5, quod est 43 et parum minus una tertia, trianguli embadum complet, et haec est figura.[2])

5 **3.** *Si metiendi notitiam prope veritatem habere desideras, ex quolibet istorum triangulorum latere duas partes de 15 demas, et reliquum erit perpendicularis.*

4. *Item si adhuc non tam multum a veritate recedens metiendi cupis habere scientiam, omnem | aequilateri trianguli aream tertiam partem quadrati* 9
10 *cuiuslibet lateris ipsius et insuper eius decimam continere cognosces.*[3])

5. Hac quidem praefatae regulae non nisi in triangulis aequilateris locum habere debent. Universalis autem triangulorum regula est, quod *multiplicatio totius perpendicularis in eiusdem basis dimidium, vel totius basis in perpendicularis dimidium trianguli embadum complet.*[4])

15 Et ut demonstratio, quod in triangulis aequilateris ex multiplicatione totius perpendicularis in eiusdem basis dimidium ⟨embadum⟩ procedit, ostendatur, triangulus aequilaterus *abc* (Fig. 14), cuius perpendicularis sit *ad*, proponatur, supra cuius punctum *c* linea *ce* aequidistans et aequalis lineae *ad* orthogonalis consti-
20 tuatur. Quo facto linea *ae* dirigatur, eritque parte ⟨altera⟩ longior *adce*, cuius duo latera sibimet invicem sunt aequalia perpendiculari *ad*, *ce*; reliqua vero duo latera sunt dimidium basis, quod est *cd* et linea *ae*, aequales. Haec autem parte altera
25 longior est multiplicatio perpendicularis in eiusdem basis dimidium, et maximo triangulo *abc* aequatur, eo quod minor triangulus *adc* dimidium parte ⟨altera⟩ longioris amplectitur, et ipse idem est medietas trianguli *abc*. Triangulus igitur *abc* parte altera longiori *adce*, quae ex multiplicatione totius perpendicularis in eiusdem
30 basis dimidium efficitur, erit aequalis, ut in hac figura monstratur.[5])

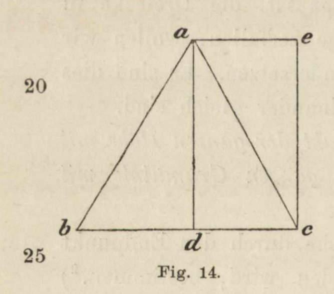


Fig. 14.

6. Item quaerenti, utrum totius basis in perpendicularis dimidium multiplicatio trianguli embadum efficiat, sic respondeas.

Multiplicatio cuiuslibet medietatis in quamlibet aliam lineam est multiplicatio totius eiusdem lineae in illius alterius lineae dimidium. Quod, licet

---

2 quae est 8. — 3 minus parum. — 4 embadus. — 5 In metiendi. — 15 quod] quae *B*. — 16 dimidium procede. — 21 altera *fehlt*. — 29 quae] quod *A*, qui *B*. — 30 hac] has *A*, hiis *B*.

und die Wurzel davon giebt die Länge der Höhe an. Das Produkt aus der Wurzel, die 8 und um eine Kleinigkeit weniger als $\frac{2}{3}$ beträgt[1]), und 5, also 43 und um etwas weniger als $\frac{1}{3}$, macht den Inhalt des Dreiecks aus, und das ist die zugehörige Figur.[2])

3. *Will man die näherungsweise Kenntnis der Ausmessung haben, so ziehe man von jeder Seite solches Dreiecks $\frac{2}{15}$ ab, dann ist der Rest die Höhe.*

4. *Will man in ähnlicher Weise nicht weit von der Wahrheit sich entfernend die Ausmessung desselben finden, so beachte man, dass der Flächeninhalt jedes gleichseitigen Dreiecks ein Drittel plus ein Zehntel ($\frac{13}{30}$) des Quadrates einer Seite enthält.*[3])

5. Diese beiden ebengenannten Regeln haben jedoch nur für das gleichseitige Dreieck Gültigkeit. *Die allgemeine Regel für Dreiecke ist aber, dass das Produkt der ganzen Höhe mal der Hälfte der Grundlinie, oder der ganzen Grundlinie mal der Hälfte der Höhe den Flächeninhalt eines Dreiecks ausmacht.*[4])

Damit nun bewiesen werde, dass in jedem gleichseitigen Dreiecke der Inhalt aus dem Produkte der ganzen Höhe mit der Hälfte der Grundlinie sich ergiebt, sei das gleichseitige Dreieck abc (Fig. 14), dessen Höhe ad ist, gegeben. Im Punkte c desselben werde die Gerade ce parallel und gleich der Geraden ad senkrecht errichtet, und darauf die Gerade ae gezogen, dann entsteht das Rechteck $adce$. Von ihm sind die beiden einander gleichen Seiten ad, ce der Höhe gleich, die beiden andern Seiten aber, nämlich cd und ae, betragen jede die Hälfte der Grundlinie. Dieses Rechteck ist also gleich dem Produkte der Höhe mal der Hälfte der Grundlinie desselben und ist auch gleich dem grösseren Dreiecke abc. Denn das kleinere Dreieck adc enthält die Hälfte des Rechtecks und ist zugleich die Hälfte des Dreiecks abc. Das Dreieck abc ist also dem Rechtecke $adce$ gleich, das durch Multiplikation der ganzen Höhe mit der Hälfte der Grundlinie entsteht, wie in der beigegebenen Figur gezeigt wird.[5])

6. Will man aber wissen, ob wirklich das Produkt aus der ganzen Grundlinie und der Hälfte der Höhe den Inhalt des Dreiecks ergiebt, so beachte man, *dass das Produkt der Hälfte einer beliebigen Geraden mit einer beliebigen andern Geraden dem Produkte der ganzen ersten Linie mit der Hälfte der andern gleich ist.* Obwohl dieses allgemein von allen Grössen

---

1) $\sqrt{75} \sim 8\frac{2}{3}$ nach der Formel:

$$\sqrt{a^2 - b} \sim a - \frac{b}{2a} \text{ für } a = 9,\ b = 6.$$

2) Leonardo 34, 16 bis auf das Zahlenbeispiel.

3) Leonardo 34, 26. Beide Rechnungen kommen auf den bekannten Näherungswerth $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$ heraus. 4) Leonardo 34, 4. 5) Leonardo 34, 40.

ab omnibus generaliter deprehendatur, tamen si geometricales demonstrationes super hoc investigare desideras, praedicti trigoni figuram, prout fuerat, informando (Fig. 15), eius perpendicularem *ad* lineam in duo aequa supra punctum *e* partire. Ad cuius utraque parte linea *gbehf* aequalis et aequi-
5 distans lineae *cb* protrahatur. Post haec a puncto *g* ad punctum *b* linea *bg*, a puncto vero *f* ad punctum *c* linea *fc* dirigatur, eritque parte altera longior *bcfg*, quod est totius basis in perpendicularis dimidium multiplicatio. Duae namque lineae *cf*, *bg*, quibus ipsius latitudo formatur, lineae *de*, quae perpendicularis dimidium continet, aequantur, eiusdemque longitudinem
10 basis *bdc* perficit. Haec autem parte altera longior triangulo *abc* existit aequalis. Nam triangulus *cfh*, qui extra maiorem triangulum formatur, triangulo *ahc* | aequatur, ipsa enim eorum latera sunt ad invicem aequalia. 9′
Triangulus vero *gbl* exterior ex altera parte formatus triangulo *ael* interiori aequus existit. Igitur, quia duo exteriores trianguli duobus interiori-
15 bus aequantur, erit totus triangulus *abc* parte altera longiori aequalis, et haec est figura.[1]) Haec quidem est demonstratio multiplicationis.

7. *Item in triangulis aequilateris si perpendicularis noticiam habueris, laterum autem noticiam ignoraveris, perpendicularem in se ipsam multiplicans eius multiplicationi tertiam multiplicationis partem superadde, totiusque col-*
20 *lecti radicem accipiens trianguli latus invenies.*

Cuius nempe demonstratio non ignoratur, eo quod in his triangulis aequilateris perpendicularis linea radix trium quartarum totius multiplicationis unius lateris in se ipsum existit, cumque illis tribus quartis tertiam partem superaddideris, primam quantitatem, quae est unius lateris multipli-
25 catio in se ipsum, perficies.

8. *Si trianguli aequilateri aream ex sola linea perpendiculari nosse desideras, perpendicularem in se ipsam multiplicans quinque multiplicationis novenas et insuper quintam unius novenae partem accipe, et trianguli aream reperies.*

30 Ut si ponamus exempli causa triangulum aequilaterum, cuius perpendicularis est radix de 75. Quam cum in se ipsam duxeris, 75 colligentur. Quinque vero novenae praedictorum 75 et quinta unius novenae 43 et tertiam reddunt, quod est trianguli area.

Huius quippe demonstratio patebit, si praedictae regulae, qua dicitur,
35 quod multiplicatio perpendicularis in semet tres quartas multiplicationis

---

4 lineam. — aequalem. — 4—5 aequidistantem. — 9 aequatur. — 12 ipsi enim eorumque. — 13 extereor *A*. — 16 Hic. — Haec . . . multiplicationis *ist in A und B als Kapitelüberschrift behandelt.* — 19 tertia. — parte. — 24 superaddens *A*.

gilt, so zeichne man, um einen geometrischen Beweis dafür zu erhalten, die Figur des vorgenannten Dreiecks, so wie sie vorher war (Fig. 15), nochmals und halbiere die Höhe *ad* im Punkte *e*. Von ihm aus ziehe man nach beiden Seiten die Gerade *glehf* gleich und parallel der Geraden *cb*, dann verbinde man den Punkt *g* mit dem Punkte *b* durch die Gerade *bg*, und den Punkt *f* mit dem Punkte *c* durch die Gerade *fc*, so entsteht das Rechteck *bcfg*, welches das Produkt aus der ganzen Grundlinie und der Hälfte der Höhe darstellt. Die beiden Geraden *cf*, *bg*, welche die Breite desselben bilden, sind nämlich der Geraden *de*, das ist der halben Höhe gleich, die Länge stellt aber die Grundlinie *bdc* dar. Dieses Rechteck ist nun dem Dreiecke *abc* gleich, denn das Dreieck *efh*, das ausserhalb des grossen Dreiecks liegt, ist dem Dreiecke *ahe* gleich, denn ihre Seiten sind einander gleich; das Dreieck *gbl* aber, das auf der andern Seite ausserhalb liegt, ist dem inneren Dreiecke *ael* gleich. Da also die beiden äusseren Dreiecke den beiden inneren gleich sind, ist auch das ganze Dreieck *abc* dem Rechtecke gleich, und das ist die zugehörige Figur.[1]) Das ist der Beweis für das Produkt.

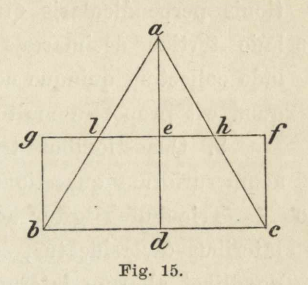


Fig. 15.

7. *Kennt man ferner in einem gleichseitigen Dreiecke die Höhe, es ist aber die Länge der Seite unbekannt, so multipliciert man die Höhe mit sich selbst und addiert dazu den dritten Theil des Produktes, dann erhält man, wenn man aus der Gesammtsumme die Wurzel zieht, die Seite des Dreiecks.*

Der Beweis dafür ist leicht zu führen, da in solchen gleichseitigen Dreiecken die Höhe gleich der Wurzel aus drei Viertheilen des Quadrates einer Seite ist, und da, wenn man den drei Viertheilen ihren dritten Theil hinzufügt, die ursprüngliche Grösse, das ist das Quadrat der Seite, wiederhergestellt wird.

8. *Will man den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks allein aus der Höhe bestimmen, so multipliciert man die Höhe mit sich selbst und nimmt von dem Produkte $\frac{5}{9}$ und $\frac{1}{5}$ eines Neuntel ($\frac{26}{45}$), und erhält dadurch den Inhalt des Dreiecks.*

Nehmen wir z. B. ein gleichseitiges Dreieck, dessen Höhe die Wurzel aus 75 ist. Multiplikation derselben mit sich selbst giebt 75, $\frac{26}{45}$ dieser 75 sind $43\frac{1}{3}$, und das ist der Inhalt des Dreiecks.

Der Beweis dafür ergiebt sich, wenn man sich an die Regel erinnert, dass das Quadrat der Höhe drei Viertheile des Quadrates einer Seite aus-

1) Leonardo 35, 36.

unius lateris in se ipsum efficiat, ⟨non inmemor fueris. Et manifeste est, quod tertia pars multiplicationis unius lateris in se ipsum⟩ et eius insuper decima ⟨trianguli⟩ embadum complet. Ut autem proportionem multiplicationis perpendicularis ⟨in se ipsam⟩ ad embadi quantitatem addiscas, ⟨si huic tertiae decimaeque parti eorundem tertiam partem superadiunxeris, inde collectum quinque novenas unius et novenae quintam partem continebit, quod est proportio multiplicationis perpendicularis ad embadi quantitatem⟩.

9. Quaestionibus triangulorum aequilaterorum expletis triangulorum aequicruriorum quaestiones ostendamus.

Triangulus igitur aequicrurius est, cuius unum latus a reliquis duobus lateribus diversificatur, supra quod perpendicularis erigitur. Et licet supra quodlibet aliorum laterum erigi possit, tamen, qualiter supra hoc elevetur, hic ostendamus, cumque de diversilatero triangulo mentionem fecerimus, qualiter supra quodlibet latus erigitur, indicabimus.

10. *Modus itaque, quo perpendicularis in triangulo aequicrurio super hoc diversum latus elevetur, est,* ut alterum duorum aequalium laterum in se ipsum multiplices, et ex collecto medietatis basis multiplicationem abiciens residui radicem addiscas, quoniam ipsa est perpendicularis longitudo. Multiplicatio vero perpendicularis in basis dimidium trianguli embadum implet, ut in hoc triangulo, cuius duo ab, ac latera sibi invicem | sunt aequalia, eiusque cathetus ad (Fig. 16), si latus ab vel ac et bd seu cd in se ipsum multiplicaveris, et multiplicationem bd vel cd ex multiplicatione ab vel ac proieceris, residuique radicem acceperis, erit ⟨illa⟩ perpendicularis ad longitudo. Perpendicularis vero ad in bd vel dc multiplicatio trianguli embadum efficit.[1]

11. *Si perpendicularis atque basis notitiam habueris et trianguli crura nosse desideras,* ut in quaestione, qua quaeritur de triangulo aequicrurio, cuius perpendicularis 12, basis vero 18 continet, quot in quolibet suorum crurium mensuras habeat, perpendicularem in se ipsum multiplicans 144 ⟨invenies⟩. Quibus si medietatis multiplicationem basis, quae est 81, superaddideris, 225 colligentur, quorum radix est 15, quod est cuiuslibet duorum crurium longitudo.

12. *Item si, trianguli aequicrurii, cuius singula crura 15, embadum*

1—2 non inmemor . . . in se ipsum *auf dem Rande von A ausradiert.* — 3 trianguli *und* 4 in se ipsam *über der Zeile in A ausradiert.* — 4—7 si huic . . . quantitatem *in A auf dem Rande ausradiert.* *B lässt* ad embadi *aus.* — 8 aequilaterum. — 9 aequiclurium *A.* — ostentamus *A.* — 10 Triangulum igitur aequicrurium. *Sonst ist* triangulus *stets als Masculinum gebraucht.* — unus. — 11 supra quod est. — 17 multiplicationes *A.* — balsis *A.* — 23 illa *fehlt.* — 30 invenies *in A über der Zeile ausradiert.*

macht. Es ist aber klar, dass $\frac{13}{30}$ des Quadrates einer Seite den Inhalt des Dreiecks ergeben. Um nun aber das Verhältnis des Quadrates der Höhe zum Inhalte des Dreiecks zu finden, so ist, wenn man zu jenen $\frac{13}{30}$ den dritten Theil desselben hinzufügt, die Summe gleich $\frac{26}{45}$, und das ist das Verhältnis des Quadrates der Höhe zu dem Flächeninhalte.

9. Nachdem so die Aufgaben über gleichseitige Dreiecke beendigt sind, wollen wir solche über gleichschenklige behandeln.

Ein gleichschenkliges Dreieck ist also ein solches, dessen eine Seite von den beiden andern Seiten verschieden ist; auf sie wird dann die Höhe gefällt. Obwohl sie auch auf jede der beiden andern Seiten gefällt werden kann, so werden wir doch hier nur zeigen, wie man die auf sie gefällte finden kann, und werden später, wenn wir vom ungleichseitigen Dreiecke handeln werden, angeben, wie man sie für jede Seite bestimmen kann.

10. *Die Art also, wie man die Höhe in einem gleichschenkligen Dreiecke auf der ungleichen Seite bestimmen kann, ist folgende:* Man multipliciert eine der beiden gleichen Seiten mit sich selbst, zieht von diesem Quadrate das Quadrat der halben Grundlinie ab, und sucht von dem Reste die Wurzel, sie ist nämlich die Länge der Höhe. Das Produkt der Höhe mit der Hälfte der Grundlinie ergiebt aber den Inhalt des Dreiecks.

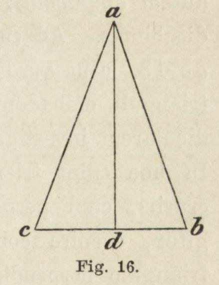


Fig. 16.

Wenn man z. B. in diesem Dreiecke, dessen beide Seiten ab, ac einander gleich sind, und seine Höhe ad (Fig. 16), die Seite ab oder ac und bd oder cd einzeln mit sich selbst vervielfacht, dann das Quadrat von bd oder cd von dem Quadrate von ab oder ac abzieht, und von dem Reste die Wurzel nimmt, so ist diese gleich der Länge der Höhe. Das Produkt der Höhe ad aber mit bd oder cd ergiebt den Inhalt des Dreiecks.[1])

11. *Kennt man die Länge der Höhe und der Grundlinie und wünscht die Schenkel des Dreiecks zu finden,* wie in der Aufgabe, in der gefragt wird, wieviel Maasseinheiten in jedem Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks enthalten sind, dessen Höhe 12, die Grundlinie aber 18 beträgt, so ergiebt sich aus der Multiplikation der Höhe mit sich selbst 144. Addiert man hierzu das Quadrat der Hälfte der Grundlinie, das ist 81, so erhält man als Summe 225. Davon ist die Wurzel 15, und das ist die Länge jedes der beiden Schenkel.

12. *Wird ferner gefragt, wieviel Ellen die Grundlinie eines gleich-*

1) Leonardo 34, 29.

autem 108 continent, quot ulnarum basis exstiterit, quaesitum fuerit, embadi quantitatem duplicans 216 invenies. Quod si ex unius cruris multiplicatione, quod est 225, proieceris, 9 remanebunt, cuius summae radicem, quae est trium ulnarum, accipe, et ipsa est superfluum, quod inter basis dimi-
5 dium et perpendicularem continetur. Huius quippe superflui dimidium, quod est unius et dimidii summa, si in se ipsum duxeris, 2 et quartam reperies. Quod si embadi summae superadiunxeris, inde collectum 110 et insuper quartam efficiet, cuius numeri radix 10 cum semisse continebit. Qui si praedicti superflui dimidium ⟨adhibueris, 12 coadunabuntur, et hoc
10 est quantitas perpendicularis, si vero superflui dimidium⟩ ex ea depresseris, 9 relinquentur, quod est basis dimidium.

Harum autem quaestionum demonstrationes ex demonstrationibus, quas in parte altera longiori docuimus, si subtiliter ingenium adhibueris, abstrahere poteris.

15 **13.** Inde modis et trianguli aequicrurii et figurae parte altera longioris explicatis diversilateri trianguli embadum demonstremus.

Triangulorum itaque diversorum laterum alii sunt *rectianguli,* alii autem *ampligonii,* alii autem *oxigonii,* et nos prius oxigonii embadum indicabimus. Ad cuius doctrinam esto triangulus abc (Fig. 17), cuius latus
20 ab 13, latus vero bc 14, latus autem ac 15 ulnas contineat. Istius itaque trianguli embadum scire volens, cum hoc nullatenus nisi per eius perpendicularem investigari possit, locum in quem perpendicularis incidit, adiscas. In hoc enim triangulo perpendicularis non, ut in aequilateris et aequicruriis, cum perpendicularis inter eius dimidia supra diversum latus eri-
25 gitur, evenire consuevit, supra basium | dimidium cadet. In hoc vero 10′ triangulo perpendicularis a dimidio basis versus alterum partem in omnibus lateribus declinat, longiorque pars *casus longior,* brevior vero *brevior casus* nuncupatur. Quapropter punctum casus perpendicularis supra basim, et cui duorum laterum longior casus coniungatur, et cuius etiam quantitatis
30 existat, nec non et cui duorum laterum brevior casus adhaereat, cuiusve sit quantitatis, inveniamus oportet. Quibus subtiliter inquisitis perpendicularis ⟨longitudinem⟩ ostendamus.[1])

---

1 contiunent. — 6 quatratem. — 8 quadrantem. — 9—10 adhibueris . . . dimidium *in A auf dem Rande ausradiert.* — 15 Inde et modus est. — figurae] fugire *A.* — 16 explicatis . . . demonstremus *in A und B als Kapitelüberschrift behandelt.* — 18 exigonii *A und so immer.* — embadus. — 21 embadus *A.* — 27 brevior casus] brevioris vero. — 32 longitudinem *fehlt.*

---

1) Leonardo 35, 1.

schenkligen Dreiecks misst, dessen Schenkel je 15, der Inhalt aber 108 enthält, so findet man zunächst durch Verdoppelung des Inhaltes 216. Zieht man das von dem Quadrate eines Schenkels, das ist von 225, ab, so bleiben 9 übrig. Hiervon nehme man die Wurzel, die 3 Ellen beträgt, dann ist sie der Überschuss zwischen der Hälfte der Grundlinie und der Höhe. Multipliciert man nun die Hälfte dieses Unterschiedes, also $1\frac{1}{2}$, mit sich selbst, so findet man $2\frac{1}{4}$. Das addiert man zu dem Inhalte, so beträgt die Summe $110\frac{1}{4}$, und die Wurzel daraus ist $10\frac{1}{2}$. Zählt man dies zu der Hälfte des obengenannten Unterschiedes, so kommen 12, das ist die Länge der Höhe, zieht man aber den halben Unterschied von der Wurzel ab, so bleiben 9, das ist die Hälfte der Grundlinie.

Die Beweise dieser Aufgabe kann man aus den Beweisen, die wir für die Rechtecke lehrten, entnehmen, wenn man seinen Geist ein wenig anspannt.

13. Und da nun die Aufgaben für die gleichschenkligen Dreiecke und die Rechtecke auseinandergesetzt sind, wollen wir lehren, den Inhalt der ungleichseitigen Dreiecke zu bestimmen.

Von den ungleichseitigen Dreiecken sind die einen *rechtwinklig,* die andern *stumpfwinklig,* die dritten *spitzwinklig.* Wir wollen zunächst angeben, den Inhalt der spitzwinkligen zu finden. Dazu habe man ein Dreieck abc (Fig. 17), dessen Seite ab 13, die Seite bc 14, die Seite ac aber 15 Ellen enthält. Da nun, wenn man den Inhalt dieses Dreiecks kennen lernen will, dieser nur vermittelst der Höhe desselben gefunden werden kann, so muss man den Fusspunkt der Höhe bestimmen. In solchen Dreiecken fällt nämlich die Höhe nicht, wie es bei den gleichseitigen und gleichschenkligen Dreiecken zu geschehen pflegt, bei welchen die Höhe in der Mitte der ungleichen Seite errichtet ist, auf die Mitte der Grundlinie, sondern die Höhe weicht in diesen Dreiecken von dem Halbierungspunkte der Grundlinie nach einer Seite ab, und zwar für alle Dreiecksseiten. Den grössern Theil nennt man den *grössern Höhenabschnitt* (maior casus), den kleinern aber den *kleinern Höhenabschnitt* (minor casus). Wir müssen also den Fusspunkt der Höhe auf der Grundlinie bestimmen, sowie, welcher der beiden Seiten der grössere Abschnitt zugehört und seine Länge, ebenso, welcher der beiden Seiten der kleinere Abschnitt anliegt und wie gross seine Länge ist, auffinden. Ist das genau gefunden, so werden wir die Länge der Höhe bestimmen können.[1])

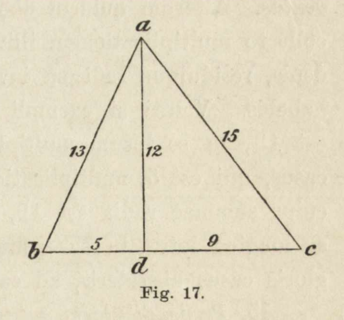


Fig. 17.

In praedicto igitur triangulo abc sint ipsius duo latera ab, ac, perpendicularis ⟨ad⟩ supra basim bc, cuius longitudo est 14. Cum invenire volueris punctum ipsius casus per longiorem vel breviorem casum, prius invenias longiorem. Itaque casum invenire desiderans multiplicationem longioris duorum laterum illi angulo adiacentium, a quo perpendicularis abstrahitur, accipe, et ipsum est latus ac, cuius longitudo 15, cui multiplicationi totius basis multiplicationem superadde, indeque collectum erit 421. De cuius summa si reliqui lateris ab multiplicationem abstuleris, quod est latus brevius, cuius multiplicatio est 169, remanebit 252. Quae si in duo aequa diviseris, 126 exibit. Huius autem numeri summa si per basis quantitatem, quae est 14, divisa fuerit, 9 in divisione provenient, et haec ⟨est⟩ summa longitudinis casus perpendicularis a latere longiori. Quod si breviorem casum nosse volueris, multiplicationem brevioris lateris cum multiplicatione basis addiscens 365 nimirum invenies. De quibus longioris lateris multiplicatione dempta, quae est 225, relinquentur 140, quae si in aequalia duo diviseris, 70 reperies. Cuius numeri summam per basis quantitatem partire, ⟨et⟩ exibit 5, quod est remotio illius puncti, in quem cadit perpendicularis, a latere breviori. Hoc idem similiter in unumquodque latus, supra quod perpendicularis abstrahitur, operabis.[1])

14. *Cognito igitur puncto casus, perpendicularis longitudinem sic invenias.* Alterum quidem duorum laterum in se ipsum multiplicans ex inde collecto multiplicationem illius casus longioris vel brevioris, qui ei adiacet, deme, residuique radicem inveniens perpendicularis longitudinem incontanter habebis. Veluti si exempli causa brevius istius trianguli latus ab, quod est 13, in se ipsum multiplicaveris, 169 reperies. De quibus si brevioris casus, qui est 5, multiplicationem, quae est 25, proieceris, 144 relinquuntur, cuius summae radix est 12, et ipse est perpendicularis longitudo. Similiter si longius latus in se ipsum duxeris, et ex collecto multiplicationem longioris casus abstuleris, ad eandem perpendicularis longitudinem pervenies.[2])

15. *Perpendicularis autem,* | *quae est 12, multiplicatio in basis dimidium, quod est 7, 84 efficiet, quod est huius trianguli embadum.*

16. Praedictorum autem demonstrationes si nosse cupis, scias, latus ab, quod acuto subtenditur angulo, tanto duobus quadratis a lateribus ac, bc acutum angulum continentibus descriptis minorem quadratum constituere, quantum est duplum rectilinei, quod sub uno eorum, quae acuto adiacent

---

2 *ad fehlt.* — 12 est *fehlt.* — a latere] altere. — 15 multiplicationem. — 17 et *fehlt in A.* — 23 invenies.

---

1) Leonardo 35, 5. 2) Leonardo 35, 27.

Im vorgenannten Dreiecke seien die beiden Seiten ab, ac, die Höhe ad auf der Grundlinie bc, deren Länge 14 ist. Da wir den Fusspunkt derselben mittelst des grössern oder kleinern Höhenabschnittes finden wollen, werden wir mit dem grössern beginnen. Um diesen Abschnitt zu finden, nehme man das Quadrat der grössern der beiden dem Winkel anliegenden Seiten, von welchem aus die Höhe gezogen ist, das ist die Seite ac von 15 Ellen Länge. Zu diesem Quadrate addiere man das Quadrat der ganzen Grundlinie, die Summe wird dann 421 sein. Zieht man von dieser Summe das Quadrat der noch übrigen Seite ab, das ist der kleinern Seite ab, und dieses Quadrat ist 169, so bleibt 252 übrig. Halbiert man das, so erhält man 126. Diese Zahl durch die Länge der Grundlinie, nämlich 14, dividiert, ergiebt 9 im Quotienten, und das ist die Länge des Höhenabschnittes von der längern Dreiecksseite aus. Will man den kleinern Abschnitt bestimmen, so sucht man die Summe der Quadrate der kleinern Seite und der Grundlinie und erhält 365. Davon bleibt nach Abzug des Quadrates der grössern Seite, das ist 225, noch 140 übrig, und halbiert man dieses, so findet man 70. Diese Zahl dividiert man durch die Länge der Grundlinie und findet so 5, und das ist die Entfernung des Fusspunktes der Höhe von der kleinern Dreiecksseite. In derselben Weise wird man für jede Seite, auf welche die Höhe gefällt wird, verfahren.[1])

14. *Da man so den Fusspunkt kennt, findet man die Höhe selbst folgendermaassen.* Die eine der beiden Seiten multipliciert man mit sich selbst, von diesem Quadrate subtrahiert man dann das Quadrat des längern oder kürzern Abschnittes, der ihr anliegt, und sucht von dem Reste die Wurzel, so erhält man dadurch unverweilt die Länge der Höhe. Vervielfacht man z. B. die kürzere der beiden Seiten ab obigen Dreiecks, das ist 13, mit sich selbst, so findet man 169. Zieht man hiervon das Quadrat des kleinern Abschnittes, der 5 war, ab, also 25, so bleiben 144 übrig. Die Wurzel davon ist 12, und soviel beträgt die Länge der Höhe. Man würde ebenso zu derselben Höhenlänge gelangen, wenn man von dem Quadrate der längern Seite das Quadrat des längern Höhenabschnittes wegnehmen würde.[2])

15. *Das Produkt der Höhe aber, das 12 ist, mit der Hälfte der Grundlinie, das ist 7, giebt 84, und das ist der Inhalt dieses Dreiecks.*

16. Um aber den Beweis der vorhergehenden Rechnungen führen zu können, muss man wissen, dass das über der Seite ab, die einen spitzen Winkel überspannt, stehende Quadrat um soviel kleiner ist als die beiden über den Seiten ac, bc, welche dem spitzen Winkel anliegen, beschriebenen Quadrate, als das doppelte Rechteck beträgt, das zwischen der einen Seite,

angulo, ⟨latere⟩ constituitur, cui etiam perpendicularis superstat, et ipsa est *bc*, et casu sui parte *cd*, quae intra perpendicularem et acutum angulum continetur, ut in geometria monstratur. Quapropter, si ex duobus quadratis a lateribus *ac*, *bc* descriptis quadratus, ⟨qui⟩ a latere *ab* con-
5 tinetur, dematur, duplum rectilinei sub lineis *cd*, *bc* constituti remanebit. Quod si in duo aequa diviseris, et alteram divisionis partem in basis *bc* quantitatem partitus fueris, invenies lineam *cd* perpendicularis casum existere. Et quia perpendicularis secundum rectum angulum elevatur, erunt duo trianguli *abd*, *adc* rectianguli; quadratus igitur, qui a latere *ab* recto
10 angulo ⟨subtenso⟩ describitur, aequus est duobus quadratis, qui a lateribus *bd*, *ad*, rectum angulum continentibus conformantur, ut geometria declarat. Quare si ex quadrato *ab* quadratum longitudinis lineae *bd* depresseris, remanebit quadratus perpendicularis *ad*. Eadem etiam erit demonstratio in quadrato *ac* cum quadrato longitudinis *cd* et quadrato perpendicularis *ad*.
15 17. *Item longiorem casum atque breviorem aliter invenire poteris.* Nam si utrumque duorum laterum angulo, a quo perpendicularis in basim abstrahitur, adiacentium in se ipsum duxeris, et ex multiplicatione maioris minoris multiplicationem abstuleris, residuique dimidium assumpseris et per totius basis summam diviseris, quod ex divisione proveniet, si ex basis di-
20 midio depresseris, breviorem casum, si vero eiusdem basis dimidio superaddideris, longiorem casum invenies. Ut si in suprascripta figura latus *ab*, cuius longitudo 13, e lateribus angulo, a quo perpendicularis educitur, adiacentibus in se ipsum multiplicaveris, 169 reperies. Si vero latus *ac*, cuius longitudo 15, in semet duxeris, 225 provenient. Cumque multiplica-
25 tionem minoris de multiplicatione maioris abstuleris, 56 relinquentur, cuius summae dimidium 28. Quae si per summam basis *bc*, quae est 14, diviseris, duo exibunt. Hoc autem si dimidio basis, quod est 7, superaddideris, 9 colligentur, et hoc est casus longior; si vero ⟨ex⟩ eodem septenario depresseris, 5 supererit, quod est casus brevior. Vel, si volueris, illa 56,
30 quae tibi remanserunt, per basis summam partire, et exibit 4, quae si totius summae basis super|addideris, 18 coadunabitur, quorum medietas 9 reddunt, 11′ et hoc est longior casus. Si autem ex basi minueris, 10 relinquentur, cuius summae dimidium, quod est 5, breviorem casum efficit.[1])

1 latere *fehlt.* — 4 qui *fehlt.* — 4—5 continentur. — 6 altera. — 10 subtenso *fehlt.* — 12 Quare si] quaerens. — 18 multiplicationis. — 21 suprascriptam figuram. — 25 66. — 26 summa. — 30 basim.

1) Leonardo 35, 23.

welche dem spitzen Winkel anliegt, und auf welcher die Höhe steht, und das ist *bc*, und dem anliegenden Höhensegment *cd*, das ist dem zwischen der Höhe und dem spitzen Winkel gelegenen, enthalten ist, wie in der Geometrie ⟨Euklid's⟩ bewiesen wird. Nimmt man also von den beiden Quadraten, die über den Seiten *ac*, *bc* beschrieben sind, das Quadrat, das über der Seite *ab* steht, weg, so bleibt das doppelte Rechteck aus den Geraden *cd*, *bc* übrig. Theilt man dieses in zwei gleiche Stücke und dividiert die eine Hälfte durch die Länge der Grundlinie, so findet man die Länge der Geraden *cd*, die das Höhensegment bildet. Da nun die Höhe senkrecht errichtet ist, so sind die beiden Dreiecke *abd*, *adc* rechtwinklig, also das Quadrat über der Seite *ab*, welche den rechten Winkel überspannt, gleich den beiden Quadraten, welche über den beiden Geraden, die dem rechten Winkel anliegen, gebildet werden, wie die Geometrie zeigt. Nimmt man also von dem Quadrate *ab* das Quadrat der Linie *bd* hinweg, so bleibt das Quadrat der Höhe *ad* übrig. Für das Quadrat über *ac*, das Quadrat der Strecke *cd* und das Quadrat der Höhe *ad* würde ein ähnlicher Beweis zu führen sein.

17. *Den grössern und kleinern Höhenabschnitt könnte man auch auf andere Art bestimmen.* Wenn man nämlich jede der beiden Seiten, welche dem Winkel anliegen, von dem die Höhe auf die Grundlinie gefällt ist, mit sich selbst vervielfacht und von dem Quadrate der grössern das Quadrat der kleinern abzieht, und die Hälfte des Restes durch die ganze Länge der Grnndlinie dividiert, so liefert der Quotient der Division von der Hälfte der Grundlinie subtrahiert den kleinern Höhenabschnitt, wenn man ihn aber zu der halben Grundlinie addiert, den grössern Höhenabschnitt. Multipliciert man z. B. in der obigen Figur die Seite *ab* von der Länge 13, die eine der Seite ist, welche dem Winkel, von dem die Höhe gefällt ist, anliegen, mit sich selbst, so ergiebt sich 169. Die Multiplikation der Seite *ac* von der Länge 15 mit sich selbst ergiebt ebenso 225. Subtrahiert man das Quadrat der kleinern vom Quadrate der grössern Seite, so bleibt 56 übrig, und die Hälfte davon ist 28. Diese Zahl durch die Grundlinie *bc*, das ist durch 14, dividiert, liefert 2, und wenn man das zu der halben Grundlinie, die 7 ist, hinzufügt, so findet man als Summe 9, das ist den längern Höhenabschnitt; wenn man es aber von 7 abzieht, so ist der Rest 5, und das ist der kleinere Abschnitt. Wenn man will, kann man auch die obigen 56, welche als Rest blieben, durch die Länge der Grundlinie theilen, dann erhält man 4. Dieses zu der ganzen Länge der Grundlinie addiert, erzeugt 18, und die Hälfte davon ergiebt 9, das ist den längern Abschnitt. Subtrahiert man aber 4 von der Grundlinie, so bleiben 10 als Rest, und die Hälfte davon, das ist 5, macht den kleinern Abschnitt aus.[1])

18. *Si basis trianguli diversilateri, cuius perpendicularis 12, alterumque latus a lateribus angulo, a quo cadit perpendicularis, adiacentibus 13, reliquum vero 15 habuerit, quot ulnarum exstiterit, quaeratur,* alterum latus, quod est 13, in se ipsum multiplicans 169 provenient. Ex quibus si per-
5 pendicularis multiplicationem, quae est 144, depresseris, 25 supererit, cuius numeri radix est 5, et hic est unus casus. Post hoc alterum latus in se ipsum multiplicans habebis 225, de quibus perpendicularis multiplicationem demens 81 remanebunt, quorum radix 9 alterum casum procurabit. Hi autem duo casus in unum coniuncti 14 reddunt, quod est basis longitudo.

10 **19.** Item quaeritur: *Triangulus diversilaterus, cuius embadum cum perpendiculari 96, basis vero sine perpendiculari 14 habuerit, quot in sui perpendicularis longitudine continet?*

Solutio. Si basis dimidium assumpseris et ei unum superaddideris, eo quod embadum in quaestione semel perpendiculari coniungetur, — nam si
15 perpendicularis et embadum bis coniungentur, duo, si vero ter, tres, et ita per singula secundum coniunctionis numerum superaddens, semper etenim tot unitates dimidio basis superadicias, quotiens embadum perpendiculari coadunaveris —, et perinde in quem collectum summam perpendicularis et embadi in unum collectam partitus fueris, perpendicularis longitudinem in-
20 venies. Quemadmodum si secundum hanc quaestionem basim in duo aequa diviseris, 7 invenies, quibus uno superaddito 8 colligentur. Per quae si 96 divisa fuerint, 12 exibunt, quod est perpendicularis longitudo. Per hoc autem, quod hac in quaestione quaeritur, reliqua latera nullatenus sciri possunt, eo quod ad eandem basim relata diversarum quantitatum inveniri
25 poterunt. Verum si unius lateris quantitas in quaestione ponatur, alterius lateris summa patebit.[1])

20. Huc usque omnium triangulorum embada secundum laterum diversitates ostendimus. Restat autem, ut secundum angulorum alterationes earum areas demonstremus. Eorum etenim quidam sunt *acutianguli,* qui-
30 dam *rectianguli,* quidam vero *ampligonii.* Licet in acutiangulis nihil aliud quam, quod dictum est, dici possit, in rectiangulis et ampligoniis, si perpendicularis super unum ex lateribus recto vel obtuso adiacentibus angulo dirigatur, alia quaedam dicendo fore decernimus. Ut perfecta igitur metiendi

2 cadunt. — 8 demens] adiciens. — 10—11 perpendicularis qb. — 11 sine perpendicularis. — 20 Quem si ad modum. — hac quaestione.

1) Da allgemein $J = h \cdot \frac{a}{2}$ ist und als bekannt $J + nh$ angenommen wird, so ist also $h\left(\frac{a}{2} + n\right)$ gegeben. Durch Division mit $\frac{a}{2} + n$ folgt also h.

18. Wenn gefragt wird: *Wieviel Ellen hat die Grundlinie eines ungleichseitigen Dreiecks von der Höhe 12, dessen eine der beiden Seiten, welche den Winkel einschliessen, von dem die Höhe gefällt ist, 13, die andere aber 15 Ellen besitzt?*, so erhält man durch Multiplikation der einen Seite von der Länge 13 mit sich selbst 169. Zieht man hiervon das Quadrat der Höhe, das ist 144, ab, so bleibt 25 Rest, und die Wurzel davon ist 5; das ist der eine Höhenabschnitt. Dann vervielfacht man die andere Seite mit sich selbst und erhält 225, davon das Quadrat der Höhe weggenommen, bleibt 81 übrig, und die Wurzel 9 liefert den andern Abschnitt. Beide Abschnitte zusammengenommen ergeben 14, und das ist die Länge der Grundlinie.

19. Ferner werde gefragt: *Wieviel Maasseinheiten wird die Höhe eines ungleichseitigen Dreiecks enthalten, dessen Inhalt plus der Höhe 96, die Grundlinie aber für sich ohne die Höhe 14 enthält?*

Auflösung. Addiert man zu der Hälfte der Grundlinie die Einheit, weil nach der Aufgabe der Inhalt nur einmal mit der Höhe vereinigt wird — denn, wenn die Höhe zu dem Inhalt zweimal hinzugefügt würde, müsste man 2, wenn dreimal, 3 und so weiter nach der Anzahl der Hinzufügungen addieren, das heisst man muss stets soviel Einheiten der Hälfte der Grundlinie hinzuzählen, so oftmal die Höhe zu dem Inhalte hinzugefügt ist —, und dividiert dann durch die erhaltene Summe die Summe aus Inhalt und Höhe, so erhält man die Länge der Höhe. Wenn man also in der vorliegenden Aufgabe die Grundlinie halbiert, so findet man 7, dazu eins addiert giebt 8. Dividiert man hierdurch 96, so erhält man 12, und das ist die Länge der Höhe. Durch das in der Aufgabe Gegebene kann man aber die andern Seiten keineswegs auffinden, da sie für dieselbe Grundlinie von verschiedener Länge gefunden werden können. Kennt man aber in der Aufgabe die Länge noch einer Seite, so kann man auch die der andern Seite finden.[1])

20. Bis hierher haben wir die Auffindung der Flächeninhalte aller Dreiecke nach der Verschiedenheit der Seiten gezeigt. Es bleibt noch übrig, dass wir auch nach der Verschiedenheit der Winkel die Inhalte derselben zu finden lehren. Von ihnen sind nämlich einige *spitzwinklig*, andere *rechtwinklig*, noch andere *stumpfwinklig*. Wenn wir nun auch für die spitzwinkligen Dreiecke nichts anderes sagen könnten als das, was wir gesagt haben, so haben wir doch für die rechtwinkligen und stumpfwinkligen, falls die Höhe auf eine der beiden dem rechten oder stumpfen Winkel anliegende Seite gefällt werden soll, noch einiges andere zu erklären. Damit also in unserem Buche die vollständige Kenntnis der Ausmessung enthalten sei, werden wir die Inhaltsbestimmung der rechtwinkligen

cognitio in hoc libro contineatur, triangulorum orthogoniorum | embada, 12
prout possumus, et prius de orthogonio explanabimus.

21. *Trianguli igitur orthogonii proprie proprium est, ut ab eius uno latere recto angulo subtenso quadratus descriptus duobus quadratis sub reli-* 5 *quis lateribus recto adiacentibus angulo contractis semper aequatur.* Haec autem duo latera ⟨ad⟩ trianguli aream investigandam sufficiunt, nec aliunde, nisi unde volueris, cathetus est abstrahendus. Nam *multiplicatio unius duorum laterum recto angulo adiacentium in alterius lateris dimidium trianguli embadum complet,* eo quod utrumque istorum laterum trianguli cathetus existit.

10 **22.** Poteris etiam alium cathetum eligere, cui basis erit linea, quae recto angulo subtenditur. Praeter hunc autem alium cathetum in eo adaptare non est possibile: alia etenim latera pro cathetis locantur.

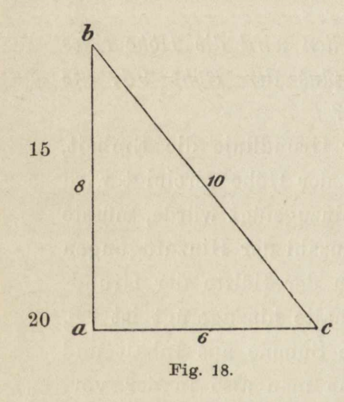


Fig. 18.

Ad huius similitudinem triangulus abc (Fig. 18) 15 ponatur, cuius angulus a rectus existat, cui duo latera ab, ac sint adiacentia, eiusdem vero latus bc subtendatur, sitque lateris ab longitudo 8, lateris quoque ac 6, lateris vero bc 10 ulnarum. In hoc itaque triangulo quadratus lineae bc 100 ulnas con- 20 tinebit, et duobus quadratis a lateribus ab, ac descriptis aequatur. Alter etenim est 36, alter vero 64, in unum autem coadunati 100 ulnas efficiunt. Istius quidem trianguli latus ab si in dimidium lateris ac multiplicaveris vel e converso, exibit 24, quod est huius trianguli embadum.

25 **23.** In hoc autem triangulo si perpendicularem super lineam recto angulo subtensam elevare volueris, multiplicationem unius lateris ex alterius lateris multiplicatione basis coadunata deme, quemadmodum in triangulo acutiangulo et diversilatero monstravimus. Velut exempli causa si 64, quae sunt multiplicatio lateris ab, ex duabus multiplicationibus ac, bc, 30 quae sunt 136, depresseris, 72 remanebunt. Cuius numeri dimidium sunt 36, quae super 10, quae sunt basis catheti quantitas, divisa fuerint, 3 et insuper tres quintas invenies, quod est casus brevior. Hoc autem si in se ipsum multiplicaveris, et quod inde proveniet, ex multiplicatione brevioris lateris abieceris, 23 et quinta quintae remanebunt, cuius summae radix 5 35 minus quinta continebit, et haec est perpendicularis quantitas. Quam si in basis dimidium, quod est 5, duxeris, embadum incontanter invenies.

24. Horum autem triangulorum duo sunt genera: aut enim erunt di-

---

6 ad *fehlt.* — 9 uterque. — 28 exemplicam *A.* — 30 dimidium] summa. — 32 quintas] quartas *A.* — 33 provenitur.

und stumpfwinkligen Dreiecke, soweit wir vermögen, darlegen, und zunächst wollen wir vom rechtwinkligen Dreiecke handeln.

21. *Die charakteristische Eigenschaft des rechtwinkligen Dreiecks ist also, dass das über der einen Seite, welche den rechten Winkel überspannt, beschriebene Quadrat immer den beiden Quadraten gleich ist, welche über den beiden andern Seiten, die dem rechten Winkel anliegen, konstruiert sind.* Diese beiden Seiten genügen aber zur Auffindung des Inhaltes des Dreiecks, und man braucht, wenn man nicht will, keine anderweitige Höhe zu ziehen. Denn *das Produkt aus einer Seite, welche dem rechten Winkel anliegt, und der Hälfte der andern Seite macht den Inhalt des Dreieckes aus,* weil jede von diesen beiden Seiten eine Höhe des Dreiecks darstellt.

22. Man könnte auch eine andere Höhe wählen, für welche die gerade Linie, die den rechten Winkel überspannt, die Grundlinie wäre. Ausser dieser aber kann man keine weitere Höhe fällen, denn die beiden andern Seiten werden als Höhen gerechnet.

Als Beispiel nehme man das Dreieck abc (Fig. 18), dessen Winkel a ein rechter sei. Ihm liegen die beiden Seiten ab, ac an, und die Seite bc überspannt ihn. Die Länge der Seite ab sei 8, die der Seite ac gleich 6, die der Seite bc aber gleich 10 Ellen. In diesem Dreiecke enthält das Quadrat der Geraden bc 100 Quadratellen und ist gleich den beiden über den Seiten ab und ac beschriebenen Quadraten. Das eine ist nämlich 36, das andere aber 64, und zusammengezählt machen sie 100 Ellen aus. Multipliciert man aber die Seite ab dieses Dreiecks mit der Hälfte der Seite ac oder umgekehrt, so ergiebt sich 24, und das ist des Dreiecks Flächeninhalt.

23. Will man aber in diesem Dreiecke die Höhe auf der den rechten Winkel überspannenden Seite errichten, so muss man das Quadrat einer Seite von der Summe der Quadrate der andern Seite und der Grundlinie wegnehmen, wie im spitzwinkligen und ungleichseitigen Dreiecke gezeigt ist. Nimmt man z. B. 64, das ist das Quadrat von ab, von den beiden Quadraten von ac und bc, die zusammen 136 betragen, weg, so bleiben 72 übrig. Davon ist die Hälfte 36, und dividiert man das durch 10, das ist die Länge der zu der Höhe gehörigen Grundlinie, so findet man $3\frac{3}{5}$, und das ist der kürzere Höhenabschnitt. Multiplicieren wir diesen mit sich selbst und subtrahieren das Ergebnis von dem Quadrate der kleinern Seite, so bleibt als Rest $23\frac{1}{25}$. Die Wurzel dieser Summe ist 5 weniger $\frac{1}{5}$, und das ist die Länge der Höhe. Durch Multiplikation derselben mit der halben Grundlinie, das ist mit 5, findet man dann sicher den Inhalt.

24. Solcher Dreiecke giebt es aber zwei Arten. Sie sind nämlich ent-

versilateri aut aequicrurii, ⟨aequilateri vero nunquam, eo quod latus recto angulo subtensum⟩ reliquis lateribus maius existere necessarium ducimus. Aliter etenim triangulus rectiangulus esse non poterit.

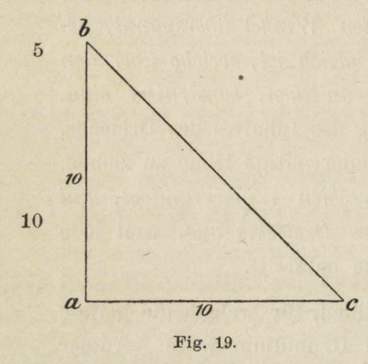


Fig. 19.

Sit ergo triangulus aequicrurius et orthogonius *abc* (Fig. 19), cuius utrumque latus *ab*, *ac* 10 ulnas et rectum angulum *a* contineat. Latus vero | *bc* fit radix 200. Totius igitur trianguli embadum 50, quod est multiplicatio 10 in 5, amplectitur, et hoc est unius lateris in alterius dimidium multiplicatio. Cumque in hoc triangulo perpendicularem super latus recto angulo subtensum elevare volueris, nimirum 50 radicem invenias. Quam si in dimidium radicis 200, quae est linea recto angulo subtensa, nec non et basis perpendicularis, multiplicaveris, 50 colligentur, quod est embadi quantitas.

Poteris etiam in hoc triangulo embadum per latera et latera per embadum, sicut in quadratis et quadrilateris ostendimus, investigare.

25. *Ampligonii vero trianguli proprie propium est, ut ab illa eius linea, quae obtuso subtenditur angulo descriptus quadratus tanto duobus quadratis duorum laterum eidem angulo adiacentium maior existit, quantum est duplum multiplicationis alterius lateris, supra quod perpendicularis erigitur, in eo, quod a perpendiculari extra comprehenditur.* Ut in hoc ampligonio triangulo *abc* (Fig. 20), cuius ebeti angulo *a* sub duobus lateribus *ab*, *ac* contento linea *bc* subtenditur. Extra hunc autem triangulum perpendicularis *bd* supra lineam *ac* protrahitur. Quadratus itaque lineae *bc* tanto duobus quadratis a lineis *ab*, *ac* descriptis maior existit, quantum est duplum multiplicationis *ac* in lineam *ad*, quod est longitudo, quae inter ipsam, scilicet *ac*, et perpendicularem continetur, ut in figura hac monstratur.

26. In hoc item triangulo perpendiculares dupliciter abstrahuntur. Nam duae extra triangulum elevantur, quarum altera super unum ex lateribus obtuso adiacentibus angulo, altera vero super alterum latus abstrahitur. Quaedam etiam intra triangulum super latus obtuso angulo subtensum erigitur. Qualiter ergo hae perpendiculares abstrahuntur, indicemus.

Esto igitur trigonus ampligonius *abc* (Fig. 21), cuius hebes angulus *a*,

1—2 aequilateri . . . subtensum *in A auf dem Rande ausradiert.* — 4 Sic ergo. — 5 utraque. — 15 colligantur. — 22 quod] quam *A*. — 24 ebethi *A*. — 25 linea *ab*.

weder ungleichseitig oder gleichschenklig; gleichseitig sind sie aber niemals, da die den rechten Winkel überspannende Seite immer grösser sein muss als die beiden übrigen Seiten, denn sonst könnte es eben kein rechtwinkliges Dreieck sein.

Es sei also abc (Fig. 19) ein gleichschenkliges und rechtwinkliges Dreieck, dessen beide Seiten ab, ac je 10 Ellen enthalten, und dessen Winkel a ein rechter ist, dann wird die Seite bc gleich $\sqrt{200}$ sein. Der Inhalt des ganzen Dreiecks ist nun 50, das ist das Produkt von 10 mal 5, nämlich das Produkt einer Seite mit der Hälfte der andern. Will man nun in diesem Dreiecke die Höhe bestimmen, welche auf der den rechten Winkel überspannenden Seite errichtet ist, so findet man sie natürlich gleich $\sqrt{50}$, und multipliciert man dies mit der Hälfte von $\sqrt{200}$, das ist der den rechten Winkel überspannenden Geraden, und zugleich der zu dieser Höhe gehörigen Grundlinie, so entsteht 50, die Grösse des Flächeninhaltes.

Man könnte auch für dieses Dreieck den Inhalt aus den Seiten und die Seiten aus dem Inhalte finden, wie wir das für Quadrate und Rechtecke gezeigt haben.

25. *Die charakteristische Eigenschaft des stumpfwinkligen Dreiecks ist aber, dass das Quadrat, welches über der Seite errichtet ist, die den stumpfen Winkel überspannt, um so viel grösser ist als die beiden über den zwei demselben Winkel anliegenden Seiten gebildeten Quadrate, als das doppelte Rechteck aus der Seite, auf welcher die Höhe steht, und dem Stücke, das von der Höhe ausserhalb des Dreiecks abgeschnitten wird, beträgt.* Wie z. B. in dem stumpfwinkligen Dreiecke abc (Fig. 20), dessen zwischen den beiden Seiten ab, ac gelegenen stumpfen Winkel a die Linie bc überspannt, ausserhalb des Dreiecks aber die Höhe bd auf die Gerade ac gefällt ist. Hier ist also das Quadrat der Geraden bc um so viel grösser als die beiden Quadrate, die über den Geraden ab, ac beschrieben sind, als das doppelte Produkt aus ac und der Geraden ad, das ist der Strecke, welche zwischen der Geraden ac selbst und der Höhe enthalten ist, wie in nebenstehender Figur zu sehen ist.

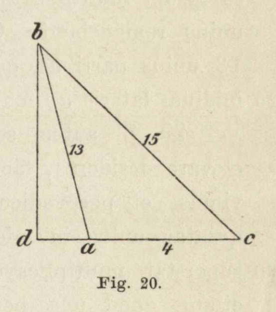


Fig. 20.

26. Bei diesem Dreiecke giebt es zweierlei Höhen. Zwei werden nämlich ausserhalb des Dreiecks geführt, von denen eine auf die eine, die andere auf die andere der beiden dem stumpfen Winkel anliegenden Seiten gefällt ist, eine wird ausserdem innerhalb des Dreiecks auf der den stumpfen Winkel überspannenden Seite errichtet. Wie man also diese Höhen finden kann, wollen wir jetzt zeigen.

Es sei also ein stumpfwinkliges Dreieck abc (Fig. 21) gegeben, dessen

sitque latus *ab* 4, latus vero *ac* 13, latus quoque *bc* angulo obtuso subtensum 15 ulnarum existat. Cuius numeri, scilicet 15, in se ipsum multiplicatio duos aliorum numerorum, quae sunt 4 et 13, multiplicationes superat in 40. Cuius superationis dimidium si per quamlibet duorum late-
5 rum summam diviseris, perpendicularis longitudinem ab eodem latere reperies. Veluti si dimidium 40, quod est 20, in lineae *ab* summam, quae est 4, diviseris, exibit linea *ea* 5 ulnarum, quod est perpendicularis a linea *ab* longitudo. Perpendicularis | autem, quae super ipsam elevatur, 13 est *ce*. Verum si idem 20 per lineae *ac* summam, quae est 13, diviseris,
10 unus et insuper 7 partes de 13 unius partibus exibunt, et hoc est longitudo perpendicularis *a* linea *ac*. Perpendicularis autem est *bd*, sicut in hac formula subscripta depingitur.[1])

27. Si perpendicularis igitur longitudinem nosse cupis, lineam *ac*, quae est longitudo longior, in se ipsam multiplicans 25 provenient. Quae
15 si ex longioris lateris in se ipsum multiplicatione depresseris, 144 remanebunt, cuius summae radix est 12, quod est linea *ce* perpendicularis. Cuius perpendicularis multiplicatio in dimidium lateris *ab*, quod ab ipsa extra comprehenditur, eiusdem trianguli embadum complet.[2])

28. Item si perpendicularis *bd* longitudinem invenire volueris, multi-
20 plicationem *ad*, qnae est longitudo brevior, in se ipsam, quae est 2 et 62 de 169 partibus unius, addiscens eam de 16, quae est brevioris lateris in se ipsum multiplicatio, deme, et 13 cum 107 partibus ⟨de⟩ 169 partibus unius remanebunt. Cuius numeri radix est 3 ulnarum et 9 partium de 13 unius partibus, quod est perpendicularis *bd* longitudo. Quam si in di-
25 midium lateris *ac* multiplicaveris, 24, quod est trianguli embadum, exibunt.[3])

29. Si autem super lineam obtuso angulo subtensam perpendicularem elevare desideras, fac, quemadmodum in triangulo acutiangulo demonstravimus, et perpendiculum in hoc subscripto triangulo trium ulnarum et quintae unius invenies. Quam si in dimidium lineae, cui perpendicularis
30 superstat, multiplicaveris, 24 in trianguli embado reperies. Manifestum est etiam, quod una perpendicularis tibi satis sufficeret, sed ut numerandi solertiam habeas et in numero promptus existas, qualiter super unumquodque cathetus elevetur, ostendimus.[4])

30. Hoc item triangulus aut erit aequicrurius aut diversilaterus, aequi-
35 laterus vero nunquam, sicut et de triangulo orthogonio supra diximus, eo

---

4 per quamlibet] supra quaelibet. — 21 eam de] eandem. — 22 de *fehlt*. — 24 Qui si.

---

1) Leonardo 36, 19. 2) Leonardo 38, 25. 3) Ebendaselbst.
4) Leonardo 38, 13.

stumpfer Winkel a, die Seite ab 4, und die Seite ac 13 sei; die Seite bc, welche den stumpfen Winkel überspannt, enthalte 15 Ellen. Das Quadrat dieser Zahl, nämlich von 15, übertrifft die Quadrate der beiden andern, nämlich von 4 und 13, in 40. Theilt man die Hälfte dieses Restes durch die Länge einer der beiden Seiten, so erhält man den Abstand der Höhe von der betreffenden Seite. Theilt man also die Hälfte von 40, das ist 20, durch die Länge von ab, das ist durch 4, so ergiebt sich die Linie ea gleich 5 Ellen, das ist der Abstand der Höhe von der Seite ab. Die daraufstehende Höhe aber ist ec. Dividiert man aber 20 durch die Linie ac, das ist durch 13, so kommen $1\frac{7}{13}$, und das ist der Abstand der Höhe von der Linie ac. Die Höhe selbst aber ist bd, wie in der nebenstehenden Figur zu sehen ist.[1])

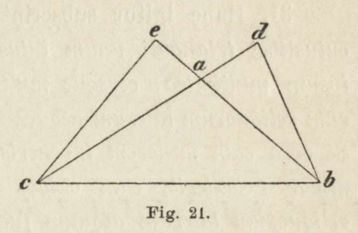


Fig. 21.

27. Um nun die Länge der Höhe zu finden, so erhält man durch Multiplikation der Geraden ae, das ist des grösseren Abstandes, mit sich selbst 25. Subtrahiert man das von dem Produkte der längern Seite mit sich selbst, so bleiben 144 übrig, davon ist die Wurzel 12, und das ist die Höhe ec. Das Produkt dieser Höhe mit der Hälfte der Seite ab, auf deren Verlängerung sie steht, macht den Flächeninhalt des Dreiecks aus.[2])

28. Will man ebenso die Länge der Höhe bd finden, so sucht man das Quadrat von ad, das ist des kleinern Abstandes, und erhält $2\frac{62}{169}$, und subtrahiert man das von 16, dem Quadrate der kleinern Seite, dann bleiben $13\frac{107}{169}$ übrig. Davon ist die Wurzel $3\frac{9}{13}$ Ellen, und so lang ist die Höhe bd. Multiplikation mit der Hälfte der Seite ac giebt 24, und das ist der Flächeninhalt des Dreiecks.[3])

29. Soll aber die Höhe auf der dem stumpfen Winkel überspannenden Seite gefunden werden, so mache man es so, wie wir es für das spitzwinklige Dreieck gelehrt haben, dann findet man für das oben gezeichnete Dreieck diese Höhe gleich $3\frac{1}{5}$ Ellen, und multipliciert man das mit der Hälfte der Geraden, auf welcher die Höhe steht, so findet man wieder 24 als Inhalt des Dreiecks. Es ist freilich klar, dass eine Höhe hingereicht hätte, damit aber der Leser Übung im Rechnen habe und in den Zahlen gewandt dastehen möge, zeigten wir auch, wie für jede Seite die Höhe zu finden sei.[4])

30. Solche Dreiecke sind wieder entweder gleichschenklig oder ungleichseitig. Gleichseitig sind sie aber niemals, wie wir schon vom rechtwinkligen Dreiecke oben behaupteten, weil in beiden Dreiecksarten die den

quod in utroque triangulo linea recto vel obtuso angulo subtensa reliquis lateribus maius existit, quemadmodum et ipsius quadratus quolibet quadrato reliquorum laterum maior habetur.

31. Hanc igitur subscriptam regulam memoriae tenaci commenda: *Si* 5 *cuiuslibet trianguli unum latus reliquis lateribus longius fuerit, illud in se ipsum multiplica, eiusque multiplicationem si duabus multiplicationibus duorum reliquorum laterum aequalem invenies, eum orthogonium fore non ambigas. Si vero eam maiorem inveneris, eum ampligonium fore cognoscas. Si autem minor existiterit, eum oxigonium iudicabis. Quod si unum latus utrique* 10 *reliquorum laterum aequum fuerit, eum similiter oxigonium fore non deneges, et tunc nec orthogonius nec ampligonius esse poterit.* | 13′

32. Ostensa doctrina metiendi triangulorum embada, ostensisque orthogonii trigoni nec non ampligonii proprietatibus oxigonii proprietatem ostendamus. *Trianguli igitur oxigonii proprie proprium est, ut, qui a linea acuto* 15 *angulo subtensa quadratus describitur, tanto duobus quadratis a reliquis lateribus eidem angulo adiacentibus conformatis minor existat, quantum est duplum multiplicationis totius lineae, cui infra perpendicularis superstat, in eam sui partem, quae inter perpendicularem et eundem acutum angulum continetur.*

20 Hoc idem autem superius in extrahendo perpendicularem intra triangulum oxigonium et diversilaterum indicavimus. Ibidem etiam illud edocuimus, per quod omnium triangulorum genera mensurari possunt. Nullum enim trigonum aliquo acuto angulo expertem fore agnoscamus.

33. Et licet mensurae omnium triangulorum per eorundem perpendi- 25 culares, ut edocuimus, inveniantur, alia tamen dari potest notitia, quae omnium trilaterarum figurarum embada metitur, quam *augmentationis vel excessus* nimirum appellant. Ea igitur est, ut *in omni triangulo singulorum laterum dimidium addiscas, et in unum colligas, indeque collectum in quo singulorum laterum quantitates excedat inquire et serva. Post haec quem-* 30 *libet eorum excessuum in altero duorum reliquorum multiplica, indeque proveniens si in tertium eorundem duxeris, et quod fuerit, in dimidium singulorum laterum in unum coadunatorum multiplicaveris, quadratus areae vel multiplicatio eiusdem trianguli colligitur, cuius quadrati radix illius trianguli embadum implet.*

35 Et ut haec levius ostendatur, triangulus, cuius unum latus 10, aliud autem 8, tertium vero 6 mensuras contineat, describatur, quorum omnium

---

18 inter] in. — 25 ut] vel. — 27 appellār *A*. — 29—30 quodlibet. — 32 coadunatum.

rechten oder stumpfen Winkel überspannende Seite grösser sein muss als jede der beiden andern Seiten. Es ist auch ihr Quadrat grösser als die Quadrate der beiden andern Seiten.

31. Folgende Regel behalte man treu im Gedächtnisse: *Ist in einem Dreiecke eine Seite grösser als jede der beiden andern, so multipliciere man sie mit sich selbst. Ist dieses Quadrat dann gleich den Quadraten der beiden andern Seiten zusammengenommen, so ist das Dreieck unzweifelhaft rechtwinklig; ist es aber grösser, so erkennt man das Dreieck als stumpfwinklig; ist es kleiner, so wird man das Dreieck für spitzwinklig erklären. Ebenso muss man, wenn eine Seite jeder der beiden andern gleich ist, das Dreieck für spitzwinklig gelten lassen, denn dann kann es weder rechtwinklig noch stumpfwinklig sein.*

32. Wir haben nun die Lehre von der Ausmessung der Inhalte der Dreiecke und die charakterischen Eigenschaften sowohl des rechtwinkligen als des stumpfwinkligen Dreiecks gezeigt, und wollen jetzt auch das Kennzeichen des spitzwinkligen angeben. *Das charakteristische Merkmal des spitzwinkligen Dreiecks ist also, dass das Quadrat einer Seite, welche einen spitzen Winkel überspannt, um so viel kleiner ist als die beiden über den dem Winkel anliegenden Seiten gebildeten Quadrate, als das doppelte Produkt der ganzen Linie, der die Höhe innerhalb des Dreieckes aufsteht, mit demjenigen Theile derselben beträgt, welcher zwischen der Höhe und dem genannten spitzen Winkel enthalten ist.*

Wir haben das schon oben bei der Bestimmung der Höhe im spitzwinkligen und ungleichseitigen Dreiecke angegeben. Dort haben wir auch gezeigt, wie wir dadurch alle Arten von Dreiecken ausmessen können, denn es giebt kein Dreieck, das einen spitzen Winkel entbehrte.

33. Obwohl die Ausmessung aller Dreiecke durch ihre Höhen gefunden werden kann, wie wir gezeigt haben, so lässt sich doch noch eine andere Regel geben, durch welche der Flächeninhalt aller dreiseitigen Figuren gemessen werden kann. Man nennt sie *die Regel der Vermehrung oder des Überschusses.* Es ist aber folgende: *Man suche in einem beliebigen Dreiecke die Hälfte jeder Seite und addiere dieselben, dann sehe man zu, um wieviel diese Summe die Länge der einzelnen Seiten übertrifft, und merke sich dieses. Darauf vervielfache man eine dieser Differenzen mit der einen der beiden andern und das Ergebnis mit der dritten, das Resultat endlich mit der Summe der Hälften der drei Seiten, so entsteht dadurch das Quadrat des Flächeninhaltes, oder das Produkt des Dreiecks mit sich selbst. Die Wurzel dieses Quadrates giebt dann den Inhalt des Dreiecks.*

Damit dies leichter klar werde, sei ein Dreieck gezeichnet, dessen eine Seite 10, die zweite 8, die dritte aber 6 Maasseinheiten enthalte. Die

laterum medietas 12 reddit. Cuius 12 ab uno laterum differentia sunt 2, ab altero vero latere 4, a tertio quidem 6. Si duo igitur, quae sunt unius lateris differentia, in 4, quae sunt differentia alterius lateris, multiplicaveris, 8 colligentur. Quod si in 6, quae sunt tertii lateris differentia
5 excessus, duxeris, 48 reperies; cuius nnmeri summam si in 12, quod est collectorum laterum medietas, multiplicaveris, 576 coadunabuntur, quorum quantitas quadratum totius embadi in praedicto triangulo manifeste complet. Cuius quadrati radicem, quae est 24, eam eiusdem trianguli embadum implere non dubites.

10 Haec quidem in geometriae demonstrationibus est intricata, quapropter tibi leviter explanari posse non existimo.[1])

Huc usque de secunda parte, deinceps vero ad tertiam transitum faciamus.

Pars tertia in illorum quadrilaterorum dimensionibus,
15 *quorum quaedam rhomboides, quaedam vero diversilatera nuncupantur.*

1. *Ad rhomboidum itaque doctrinam investigandam* rhomboides *abcd* (Fig. 22) descri|batur, cuius duo *ab*, *cd* latera in oppositum constituta 14 sibimet invicem sint aequalia, quorum unumquodque latus 25 contineat ulnas, reliqua vero duo latera *bc*, *da* sibimet opposita alterum alteri simi-
20 liter aequentur, quorum utrumque 15 ulnas amplectatur. Cumque istius embadum nosse desideras, eius diametrum *bd*, quod est 20 ulnarum ⟨inveniás⟩. Unde scilicet, quia est 20 ulnarum, ipsius angulos rectos non esse monstratu addiscas, nam si rectos haberet angulos, eius diametrum *bd* solius numeri 850 et non alterius radix existeret, ⟨quae radix⟩ 29 ulnas
25 et quasdam insuper fractiones ad sui perfectionem recipit. Hoc autem diametrum 20 supra inventum rhomboidem in duos sibimet aequos triangulos dividit, et quoniam istius rhomboidis embadum nisi per horum triangulorum areas investigare nequimus, si in altero istorum triangulorum perpendicularem produxerimus, eius embadum addiscemus. Quod inventum
30 si duplicaverimus, totius rhomboidis embadum non ignorabimus. Si in triangulo igitur *abc* perpendicularem super latus *ab* produxerimus, eius perpendicularis quantitas 12, trianguli que area 150 continebit, cuius summae duplum 300 in se suscipit, quod est huius rhomboidis embadum. Si autem aliam perpendicularem in altero triangulo produxeris, ad idem pervenies.

---

2 latere] latus. — 8 quadrato. — radicem] radice multiplicata. — 21 desiderat. — 21—22 invenias *fehlt.* — 24 quae radix *in A über der Zeile ausradiert.* — 26 rhomboides.

---

1) Leonardo 40, 7. Er giebt auch den von Savasorda als zu verwickelt ausgelassenen Beweis im Ganzen nach dem der drei Brüder.

Summe der Hälften aller Seiten ergiebt dann 12. Die Differenz dieser 12 mit der ersten Seite ist 2, mit der zweiten Seite 4, mit der dritten aber 6. Vervielfacht man also 2, die Differenz mit der ersten Seite, mit 4, das ist der Differenz der zweiten Seite, so entsteht 8; dieses wieder mit 6, das ist der Differenz der dritten Seite, multipliciert liefert 48. Multipliciert man diese Summe mit 12, das ist mit der Hälfte der Seitensumme, so wächst das Produkt zu 576 an, und diese Grösse erfüllt das Quadrat des Gesammtinhaltes des genannten Dreiecks. Die Wurzel dieses Quadrates, und das ist 24, ist unzweifelhaft der Flächeninhalt unseres Dreiecks.

Der geometrische Beweis dieser Regel ist jedoch sehr verwickelt, sodass ich nicht glaube, ihn hier leicht auseinandersetzen zu können.[1])

Soweit der zweite Theil, nun wollen wir zum dritten übergehen.

Dritter Theil: Die Ausmessung derjenigen Vierecke, welche theils Rhomboide, theils ungleichseitige Vierecke genannt werden.

1. *Um jetzt die Lehre von den Rhomboiden zu ergründen,* sei das Rhomboid *abcd* (Fig. 22) gezeichnet, dessen beide gegenüberliegende Seiten *ab*, *cd* einander gleich seien, und jede derselben enthalte 25 Ellen. Von den beiden andern sich gegenüberliegenden Seiten *bc*, *da*, die ebenfalls einander gleich sind, sei jede 15 Ellen lang. Um nun den Inhalt desselben kennen zu lernen, muss man die Länge der Diagonale *bd* desselben suchen, sie sei gleich 20 Ellen, und daraus, nämlich dass sie 20 Ellen misst, folgt, dass seine Winkel keine rechten sein können. Denn, wären die Winkel rechte, so wäre die Diagonale die Wurzel der einzigen Zahl 850, und diese Wurzel hat eine Gesammtlänge von 29 Ellen und einem Bruche. Die oben gefundene Diagonale von 20 Ellen Länge zerschneidet das Rhomboid in zwei einander gleiche Dreiecke, und da wir den Flächeninhalt des Rhomboids nur durch die Inhalte dieser Dreiecke auffinden können, so werden wir, indem wir in einem von diesen Dreiecken die Höhe ziehen, seinen Inhalt kennen lernen. Verdoppeln wir dann das Ergebnis, so kennen wir auch den Flächeninhalt des ganzen Rhomboids. Ziehen wir also im Dreiecke *abc* die Höhe auf der Seite *ab*, so finden wir ihre Länge gleich 12, und die Fläche des Dreiecks enthält 150. Das Doppelte dieser Summe ist 300, und das ist der Inhalt des Rhomboids. Zöge man aber in dem andern Dreiecke eine andere Höhe, so käme man auf dasselbe hinaus.

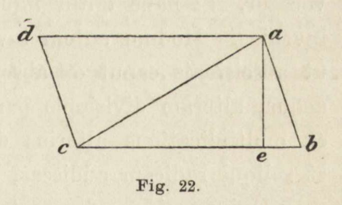


Fig. 22.

Similiter etiam, si totam perpendicularem in totius basis summam multiplicaveris, idem nimirum ostendet, ut in hoc depicta figura monstratur.[1])

2. ⟨In hac autem rhomboide quodlibet duorum diametrorum par alterius quantitatem inveniri poterit, si omnium laterum longitudinem et totius embadi quantitatem sciveris, quod qualiter invenias, per supradictas demonstrationes ostenditur.⟩

3. Quadrilatera vero diversilatera, quorum doctrina relinquitur, in duo genera dividuntur. Primi ⟨itaque⟩ generis figurae sunt, quibus duo tantum latera aequidistantia continentur. Hae autem in quatuor figurarum manerias subdividuntur. Secundum vero genus illas figuras amplectitur ⟨quarum⟩ nulla latera aequidistantia repraesentantur.

4. Primae igitur maneriei primum genus est figura quadrilatera *abcd* (Fig. 23), cuius duo latera *ab*, *cd* sibimet invicem sunt aequalia, non autem aequidistantia, quorum unumquodque 13 ulnas in se continet. Reliqua vero duo latera *ac*, *bd* aequidistantia quidem sunt, sed non aequalia. Latus etenim *ac* 8, latas vero *bd* 18 continet ulnas. Haec autem figura ⟨*aeque caput abscissa* nuncupatur. De eius aequidistantibus lateribus breve latus *abscisionis caput* nominatur, latus vero *bd* longius⟩ *abscisionis basis* vocatur. Si hanc igitur figuram metiri volueris, eius perpendicularem prius invenias. Modum autem inveniendi perpendicularis ⟨longitudinem⟩ dicimus, ut abscisionis caput ex abscisionis basi demas, et reliquum | in duo divides 14′ aequa, alteram divisionis partem in se ipsam multiplices, indeque collectum ex multiplicatione alterius duorum aequalium laterum in se ipsis minuas, et reliqui radicem addiscas, quia ipsa est perpendicularis quantitas.[2])

Huius quidem demonstrationem sic addiscas. Quia 8, quae sunt caput abscisionis, ex 18, quae sunt abscisionis basis subtraximus, 10 remanebunt, cuius summae dimidium sunt 5, quod est quantitas basis, quae ex altera parte figurae remanet, et ipsa est linea *bc* ex parte *b* remanens, ex parte vero *d* est linea *df*. Quare si a puncto *a* ad punctum *e* lineam *ae*, a puncto vero *c* usque ad punctum *f* lineam *cf* protraximus, harum linearum utramque super basim *bd* orthogonaliter cadere nulli dubium est. Triangulus igitur *aeb* est orthogonius, cuius linea recto angulo subtensa est latus *ab*. Notum est etiam, quod quadratus istius lineae *ab*, quae est 13, quadrato

---

1 tota. — 4—7 In hac . . . ostenditur *in A auf dem Rande ausradiert.* — 8 quadrilateras. — diversilateras. — 9 itaque *über der Zeile in A ausradiert.* — 11 quarum *fehlt.* — 18—19 aeque caput . . . longius *in A auf dem Rande ausradiert.* — 20 meteri. — 21 longitudinem *fehlt.* — 30 puncto *a*] punta *A*. — 32 utramque] unamque *B*. — 34 est 13] est ex *A*.

---

1) Leonardo 77, 9. 2) Leonardo 78, 24.

Ebenso würde das Produkt aus der ganzen Höhe und der ganzen Grundlinie dasselbe ergeben, wie in der nebengezeichneten Figur gezeigt ist.[1])

2. In einem solchen Rhomboide kann jede der beiden Diagonalen durch die Grösse der andern gefunden werden, wenn die Grösse aller Seiten und der Flächeninhalt bekannt sind. Wie man das findet, wird durch die obigen Darlegungen gezeigt.

3. Die ungleichseitigen Vierecke, deren Lehre noch aussteht, werden in zwei Arten getheilt. Die erste Art dieser Figuren sind solche, welche nur zwei parallele Seiten besitzen. Sie zerfallen wieder in vier Unterabtheilungen. Die zweite Art umfasst dann alle jene Figuren, welche mit gar keinen parallelen Seiten dargestellt werden.

4. Die erste Unterabtheilung der ersten Art ist ein Viereck $abcd$ (Fig. 23), dessen beide Seiten ab, cd einander gleich aber nicht parallel sind, eine jede möge 13 Ellen enthalten. Die andern beiden Seiten ac, bd sind zwar parallel, aber nicht gleich. Es möge nämlich die Seite ac 8, die Seite bd aber 18 Ellen enthalten. Solche Figuren heissen *mit gleichmässig abgeschnittenem Kopfe* (gleichschenkliges Trapez). Von den beiden parallelen Seiten nennt man die kleinere Seite ac den *Abschnittskopf,* die längere Seite bd dagegen die *Abschnittsgrundlinie.* Will man diese Figur ausmessen, so muss man zuvörderst ihre Höhe finden. Als Methode, die Länge der Höhe zu bestimmen, geben wir folgende. Man ziehe den Abschnittskopf von der Abschnittsgrundlinie ab, halbiere den Rest, multipliciere die Hälfte mit sich selbst und ziehe das Ergebnis von dem Quadrate einer der beiden gleichen Seiten ab, dann suche man die Wurzel des Restes, denn diese ist die Grösse der Höhe.[2])

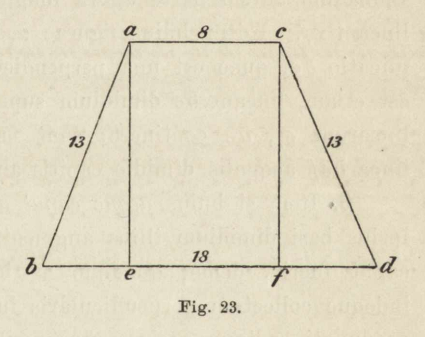


Fig. 23.

Den Beweis dafür kann man so einsehen. Wenn man 8, das ist der Abschnittskopf, von 18, der Abschnittsgrundlinie, wegnimmt, so bleibt 10 übrig. Die Hälfte dieser Summe ist 5, und das ist die Strecke, welche auf jeder der beiden Seiten der Figur übrig bleibt. Es ist auf der Seite von b die Gerade bc, auf Seite von d aber die Strecke df. Zieht man daher vom Punkte a nach dem Punkte e die Gerade ae, vom Punkte c aber nach dem Punkte f die Gerade cf, so ist nicht zweifelhaft, dass beide Geraden auf der Grundlinie bd senkrecht stehen. Das Dreieck aeb ist also rechtwinklig, und die den rechten Winkel überspannende Seite ist ab. Es ist ferner bekannt, dass das Quadrat dieser Seite ab, die gleich 13 ist,

lineae eb, quae est 5, et quadrato lineae ae, cuius quantitatem quaerimus, aequatur. Quare si quadratum 5 de quadrato 13 depresseris, 144 remanebunt, cuius summae radicem, quae est 12, perpendicularem esse non ignoramus.

5. Istius autem *aeque caput abscissae figura embadum* si nosse desideras, summam abscisionis capitis cum summa abscisionis ⟨basis coniungens 26 efficies, cuius numeri dimidium, quod est 13, in perpendicularis summam, quae est 12, multiplicans 156 in embado⟩ reperies.

Et ut huius rei demonstrationem non ignores, sic accipias. Quia embadum trianguli abe, sicut est manifestum, est multiplicatio perpendicularis ae in dimidium lineae be, embadum vero trianguli cfd est multiplicatio lineae cf, quae est perpendicularis, quae lineae ae existit aequalis, in dimidium lineae fd, quae est aequalis lineae be, erunt duorum triangulorum embada in unum collecta ut multiplicatio ae perpendicularis in totam eius basim eb. Embadum autem parte altera longioris $aecf$ est multiplicatio lineae ae in lineam ef. Igitur huius figurae aeque caput abscissae embadum est multiplicatio ae, quae est una perpendicularis, in totam basim bef. Manifestum est etiam, lineam be dimidium superflui, lineam vero ef dimidium duarum linearum ef, ac continere; sunt enim ef, ac aequales. Erit igitur tota linea bef aequalis dimidio capitis abscisionis cum basis dimidio coadunato.[1])

6. Item si huius *aeque caput abscissae diametrum* invenire quaeris, ex ipsius basi dimidium illius augmenti, quod inter ipsam basim et abscisionis caput fuerit, deme, quodque ex basi supererit, in se ipsum multiplica, indeque collectum perpendicularis in se ipsam multiplicationem superaddens coadunati radicem accipe, et quaesitum diametrum invenies. |

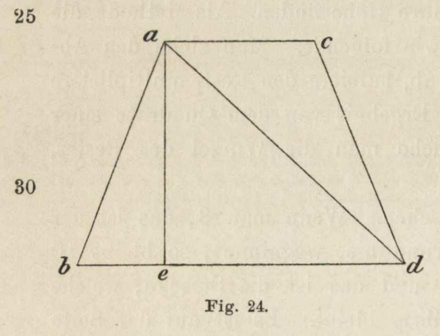


Fig. 24.

Veluti si in hac eadem figura protraxeris ab a usque ad d lineam ad (Fig. 24), cuius longitudinem scire quaeris. Quia ipsa subtenditur recto angulo aed, cui perpendicularis ae et linea ed, quae ex base supererat, sunt adiacentes, erit totius lineae ad in se ipsam ⟨multiplicatio⟩ multiplicationibus linearum ae, ed, quae recto adiacent angulo, aequalis. Cumque perpendicularis ae multiplicationem, quae est 144, multiplicationi ed, quae est id, quod ex basi supererat, et sunt 169, superaddideris, 313 inde col-

5 capitis] capias. — 5—7 basis . . . in embado *auf dem Rande von A ausradiert.* — 19 coadunatum scilicet abscionis caput fuerit. — 32 multiplicatio *fehlt.* — 34 adiacet.

dem Quadrate der Geraden *eb*, die 5 beträgt, plus dem Quadrate der Geraden *ae*, deren Länge wir suchen, gleich ist. Wenn wir also das Quadrat von 5 von dem Quadrate von 13 abziehen, so bleiben 144, und dass die Wurzel dieser Zahl, die 12 beträgt, die Höhe ist, wissen wir.

5. Will man nun *den Flächeninhalt des gleichschenkligen Trapezes* kennen lernen, so addiert man die Länge des Abschnittkopfes zur Länge der Grundlinie und erhält so 26. Dann multipliciert man die Hälfte dieser Summe, das ist 13, mit der Länge der Höhe, nämlich 12, und findet so 156 als Flächeninhalt.

Um den Beweis dieser Regel zu führen, verfährt man so. Da der Inhalt des Dreiecks *abe* offenbar gleich dem Produkte der Höhe *ae* mit der Hälfte der Linie *be*, der Inhalt des Dreiecks *cfd* aber das Produkt der Geraden *cf*, das ist der Höhe, und sie ist der Linie *ae* gleich, mit der Hälfte der Geraden *fd* ist, welche der Geraden *be* gleich ist, so ist die Summe der beiden Dreiecke gleich dem Produkte der Höhe *ae* mit der ganzen Grundlinie *eb*. Der Inhalt des Rechtecks *aecf* ist aber gleich dem Produkte der Geraden *ae* mit der Geraden *ef*. Der Gesammtflächeninhalt dieses gleichschenkligen Trapezes ist daher das Produkt von *ae*, das ist einer Höhe, mit der ganzen Grundlinie *bef*. Nun ist klar, dass die Gerade *be* die Hälfte der Differenz, die Gerade *ef* aber die Hälfte der beiden Geraden *ef*, *ac* enthält, *ef* und *ac* sind nämlich gleich. Also ist die ganze Linie *bef* gleich der Hälfte des Abschnittkopfes plus der Hälfte der Abschnittsgrundlinie.[1])

6. Will man ferner die *Diagonale dieses gleichschenkligen Trapezes* bestimmen, so ziehe man von der Grundlinie die Hälfte des Unterschiedes zwischen der Grundlinie und dem Abschnittskopfe ab, den Rest der Grundlinie multipliciere man mit sich selbst und addiere zu dem Produkte das Quadrat der Höhe, nehme von der Summe die Wurzel, und findet so die fragliche Diagonale.

Wenn man z. B. in derselben Figur von *a* nach *d* die Gerade *ad* zieht (Fig. 24), deren Länge man zu finden wünscht. Da diese den rechten Winkel *aed* überspannt, dem die Höhe *ae* und die Strecke *ed* anliegen, welche von der Grundlinie übrig blieb, so muss das Quadrat der Linie *ad* den Quadraten der Linien *ae*, *ed*, welche dem rechten Winkel anliegen, gleich sein. Addiert man nun das Quadrat der Höhe, das ist 144, zu dem Quadrate von *ed*, das ist das, was von der Grundlinie übrig blieb, es sind 169,

---

1) Leonardo 78, 39.

ligentur, et haec est diametri in se ipsum multiplicatio, cuius summae radix diametri longitudinem repraesentat.[1])

7. Si duo aequalia, sed non aequidistantia latera hac in figura, quae aeque caput abscissa dicitur, illa ex parte a qua terminantur in lineam, 5 quae abscisionis caput nuncupatur, donec ad idem punctum concurrant, abstrahere cupis, triangulus inde proveniet. Sicut exempli causa si hac in figura duo latera *ba*, *dc* a duobus punctis *a*, *c*, quae sunt capitis extremitates, extra produxeris, supra punctum *f* concurrent, et tunc haec figura caput abscissa in triangulum *fbd* terminabitur (Fig. 25). Quare si illarum 10 duarum linearum, quae extra protrahuntur longitudines non ignorare desideras, quantitatis omnium laterum capitis abscissae prius notitiam habeas. Dehinc id, in quo basis abscisionis caput ⟨superat, et sunt 10, inquire et serva. Post hoc abscisionis caput⟩, quod est 8, in totius lateris summam, quae est 13, multiplicans 104 efficies. Quae si per 10, quod est superatio, 15 diviseris, 10 et duas insuper unius quintas reperies, quod est lineae *af* extra productae longitudo, ⟨quae⟩ *cf*, quae similiter extra protrahitur, aequatur.[2])

8. Hoc idem, si volueris, aliter numerare poteris. Nam si proportionem 8, quae sunt abscisionis capitis longitudo, ad 10, quod est id, in 20 quo a sua basi superatur, et est subsexquiquarta, didiceris, eandem proportionem id, quod extra protrahitur, ad illud, quod infra continetur, quod est figurae latus, habere non dubites. Scilicet latus ipsum autem est 13, linea igitur extra protracta 10 et duas quintas, quae sunt quatuor quintae de 13, continebit.

25 9. In hoc item triangulo si perpendicularem invenire volueris, perpendiculari *ae*, ⟨quam⟩ in figura aeque caput abscissa produxeras, quatuor eius quintas, quemadmodum et lateribus, superadde, et perpendicularis trianguli *fbd* longitudinem invenies. Perpendicularis autem *ac*, ut supra diximus, 12 in se continet, cui si quatuor eius quintas superaddideris, 30 21 et tres quintas invenies, quod est perpendicularis *fg* in triangulo erectae longitudo.[3])

10. Secundae vero maneriei est figura caput abscissa, cuius duo tantum latera sunt aequidistantia, quorum alterum *ac* 8, alterum vero *bd* 22 con-

---

5 concurret. — 6 triangulis. — perveniet. — 12—13 superat ... caput *auf dem Rande von A ausradiert.* — 16 *Das erste* quae *fehlt.* — 26 quam *fehlt.*

---

1) Leonardo 79, 4. 2) Leonardo 79, 43. 3) Leonardo 80, 20.

so ist die entstehende Summe 313, und das ist das Quadrat der Diagonale, und dessen Wurzel ergiebt die Länge der Diagonale.[1])

7. Wenn man die beiden gleichen, aber nicht parallelen Seiten dieser Figur, die mit gleichmässig abgeschnittenem Kopfe genannt wird, nach der Seite hin, wo sie in der Abschnittskopf genannten Geraden endigen, zu verlängern wünscht, bis sie in einem Punkte zusammenlaufen, so entsteht dadurch ein Dreieck. Verlängert man z. B. in der vorliegenden Figur die beiden Seiten ba, dc von den beiden Punkten a, c aus, den Endpunkten des Abschnittskopfes, nach aussen, so laufen sie im Punkte f zusammen, und dann endigt dieses Trapez in dem Dreiecke fdb (Fig. 25). Will man nun die Grösse der beiden Linien, die ausserhalb die Verlängerung bilden, kennen lernen, so muss man zuvor die Grösse aller Seiten des Trapezes wissen. Dann suche man den Überschuss der Grundlinie über den Abschnittskopf, das ist 10, und verwahre ihn. Darauf multipliciert man den Abschnittskopf, nämlich 8, mit der ganzen Länge der Seite, das ist mit 13, und erhält 104. Dividiert man das durch 10, das ist den obigen Überschuss, so findet man $10\frac{2}{5}$, und das ist der Betrag der äussern Verlängerung af, welche der andern äussern Verlängerung ef gleich ist.[2])

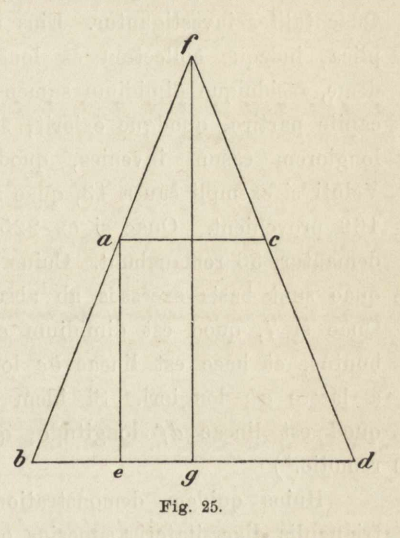


Fig. 25.

8. Das kann man auch, wenn man will, anders berechnen. Sucht man nämlich das Verhältnis von 8, der Länge des Abschnittkopfes, zu 10, das ist das, worin derselbe von der Grundlinie übertroffen wird, und dieses Verhältnis ist das von 4 zu 5, so muss die äussere Verlängerung zu dem innerhalb liegenden Stücke, das ist zu der Seite der Figur, dasselbe Verhältnis besitzen. Nun ist die Seite 13, also enthält die äussere Verlängerung $10\frac{2}{5}$, das sind $\frac{4}{5}$ von 13.

9. Will man ferner in diesem Dreiecke die Höhe finden, so braucht man nur der Höhe ae, die man in dem Trapeze gefällt hatte, $\frac{4}{5}$ wie den Seiten, hinzuzufügen, und findet so die Länge der Höhe des Dreiecks fbd. Die Höhe ae enthält aber, wie wir oben sagten, 12 in sich. Addiert man hierzu $\frac{4}{5}$, so ergeben sich $21\frac{3}{5}$, und das ist die Länge der in dem Dreiecke gefällten Höhe fg.[3])

10. Die zweite Unterabtheilung ist aber eine Figur mit abgeschnittenem Kopfe, bei der nur zwei Seiten parallel sind, von denen die eine ac 8,

tinet ulnas. Reliqua duo latera sunt inaequalia, quorum alterum *ab* 15, alterum vero *cd* ulnas 13 amplectitur (Fig. 26). Haec autem figura *abscissa caput diversa* | nuncupatur. Embadum per suae perpendicularis inventionem, sicut et superiori figura monstravimus, addiscitur.[1]

In hac etiam figura caput abscissa *puncta casus perpendicularium* nobis scire necesse est, et qualiter longiorem atque breviorem casum addiscamus. Quae taliter investigantur. Eius nempe brevius latus in ⟨se⟩ ipsum multiplica, indeque collectum ex longioris lateris in se ipsum multiplicatione deme, residuique dimidium sumens illud per basis excessum ⟨ab⟩ abscisionis capite partire, quodque exierit, si dimidio eiusdem excessus superaddideris, longiorem casum invenies, quod est catheti remotio a latere longiori. Veluti si exempli causa 13, quae sunt lateris *cd* longitudo, in semet duxeris, 169 provenient. Quae si ex 225, quae sunt multiplicatio lateris longioris, demantur, 56 remanebunt. Cuius summae dimidium, quod est 28, si per 14, quae sunt basis excessus ab abscisionis capite, partitus fueris, 2 exibunt. Quae si 7, quod est dimidium excessus basis, superaddideris, 9 procurabuntur, et haec est lineae *be* longitudo, quod est remotio perpendicularis a latere *ab* longiori. Si idem autem ex 7 depresseris, remanebunt 5, quod est lineae *df* longitudo, quae est a breviori latere perpendicularis remotio.[2]

Huius quidem demonstrationes ex demonstratione perpendicularis in triangulis diversilateris superius ostensa cognosces. Cum enim ex basi abscisionis capitis longitudinem abstuleris, reliquum ut *bg* unius continuum lineae quantitas remanebit. Et punctum *a* quasi coniungi cum puncto *g*, ipsamque figuram triangularem assumere formam tibi mente propone, et tunc longiorem atque breviorem casum sicut in triangulo diversilatero reperies.

11. Item si *perpendicularis longitudinem* nosse desideras, utriusque ⟨casus⟩ longitudinis multiplicationem ex multiplicationibus illorum laterum, quae eis sunt contigua, deme, residuique radicem accipiens perpendicularis longitudinem invenies. Veluti si 9, ⟨quae sunt linea *be*, quae est casus longior, in semet duxeris, 81 efficies. Quae si ex 225 depresseris, quae sunt multiplicatio lineae *ab*⟩, quae est latus longior, 144 remanebunt, quod est perpendicularis multiplicatio. Cuius multiplicationis radix est 12,

---

3 divisa *A*. — 7 se *fehlt*. — 8 multiplicationem. — 9 ab *fehlt*. — 11 longioris. — 22 trianguli. — 28 utriusque utriusque *A*. — 29 casus *fehlt*. — 31—33 quae est ... lineae *ab in A auf dem Rande ausradiert.*

---

1) Leonardo 81, 9 v. u. 2) Leonardo 81, 5 v. u.

die andere bd aber 22 Ellen enthalten mag. Die beiden andern Seiten sind ungleich, die eine derselben ab sei 15, die andere cd aber 13 Ellen lang (Fig. 26). Diese Figur aber heisst *mit verschiedenartig abgeschnittenem Kopfe.* Ihr Inhalt wird, wie der der vorhergehenden Figur, durch Aufsuchung ihrer Höhe bestimmt.[1])

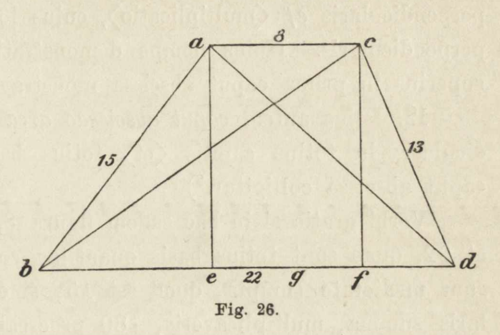


Fig. 26.

Auch für diese Figur müssen wir *die Höhenfusspunkte* kennen, und wie wir den längern und kürzern Höhenabschnitt bestimmen können. Man findet sie folgendermaassen. Man nehme das Quadrat der kleinern Seite von dem Quadrate der grössern Seite weg, dann theile man die Hälfte des Restes durch die Differenz zwischen der Grundlinie und dem Kopfe, und addiere das Ergebnis zu der Hälfte obiger Differenz, so findet man dadurch den längern Höhenabschnitt, das heisst die Entfernung derselben von der grössern Seite. Vervielfacht man nämlich 13, das ist die Länge der Seite cd, mit sich selbst, so kommen 169, und zieht man das von 225 ab, das ist von dem Quadrate der längern Seite, so bleiben 56. Die Hälfte dieser Zahl ist 28. Man theilt sie durch 14, die Differenz zwischen Grundlinie und Abschnittskopf, das liefert 2. Wenn man dies zu 7, der halben Differenz von Grundlinie und Kopf, addiert, so entstehen 9, und das ist die Länge der Strecke be, der Entfernung der Höhe von der längern Seite ab. Zieht man aber dasselbe von 7 ab, so bleiben 5, und das ist die Länge der Strecke df, der Entfernung der Höhe von der kleinern Seite.[2])

Die Beweise dafür findet man gemäss den Beweisen, die für die Höhe der ungleichseitigen Dreiecke geführt sind. Denn, wenn man von der Grundlinie die Länge des Kopfes abschneidet, so bleibt als Rest bg, als einer stetigen Linie Länge übrig. Nun denke man sich den Punkt a gleichsam mit dem Punkte g verbunden und dadurch die Form eines Dreiecks entstanden, dann kann man den längern oder kürzern Höhenabschnitt wie im ungleichseitigen Dreiecke auffinden.

11. Will man ferner *die Länge der Höhe* kennen lernen, so ziehe man das Quadrat eines der beiden Höhenabschnitte von dem Quadrate der Seite ab, welche jedesmal demselben anliegt. Sucht man dann die Wurzel des Restes, so findet man die Länge der Höhe.

Vervielfacht man z. B. 9, das ist die Linie be, der längere Höhenabschnitt, mit sich selbst, so kommt 81; zieht man das von 225, dem Quadrate der Geraden ab, das ist der längern Seite, so bleibt 144 als Rest,

et haec est perpendicularis *ae* longitudo. Similiter etiam, si 5, quae sunt casus brevior, in semet duxeris, 25 reperies. Quae si ex 169, quod est brevioris lateris multiplicatio, dempta fuerit, 144 remanebunt, quod est perpendicularis *ef* ⟨multiplicatio⟩, cuius longitudo est 12, sicut et alterius
5 perpendicularis. Huius nempe demonstrationem ex demonstratione, quam superius in prima caput abscissa monstravimus, addisces.[1])

12. Istius autem *caput abscissae area* ex multiplicatione unius perpendicularis in totius capitis ⟨et⟩ totius basis dimidium sicut et in aeque caput abscissa colligitur.[2])

10 Verbi gratia si in hac eadem figura 8, quae sunt capitis totius summa, et 22, quae sunt totius basis quantitas, coadunaveris, 30 colligentur, | quo- 16 rum medietate sumpta, quod est 15, si eam in 12, quod est perpendicularis summa, multiplicaveris, 180 procreabuntur, et haec est huius capitis abscissae area.

15 **15.** Quod si eiusdem figurae *diametra* scire volueris, totius capitis totiusque casus perpendicularis summam in unum colligens inde collectum in se ipsum multiplica, eique multiplicationi perpendicularis in se ipsam multiplicationem superadde, et quod habueris erit illius diametri in semet multiplicatio, quod est contiguum illi lateri, cuius a perpendiculari remo-
20 tionem capiti coadunaveras.

Veluti si brevius diametrum *ad* scire desideras, 8, qua totius capitis summa constituitur, cum 5, quae sunt casus brevior, coadunabis, et 13 efficies, quorum in semet multiplicatio 169 colligit. Perpendicularis vero multiplicatio 144 in se complectitur. Haeque duae multiplicationes in unum
25 coadunatae 314 efficiunt, quod est brevioris diametri *ad* in se ipsum multiplicatio.

Item si longius diametrum *bc* nosse volueris, 8 quae sunt summa capitis, et 9, quae sunt casus longior, in unum colligens 17 invenies, quorum multiplicatio 289 colligit. Quibus si 144, quae sunt perpendicularis
30 multiplicatio, superaddideris, 433 nimirum invenies, et haec est longioris diametri *bc* multiplicatio.[3])

14. Ac si huius capitis abscissae verticem invenire desideras, id est, si duas *ba*, *dc* lineas, donec ad idem punctum *f* concurrant, abstraxeris, et duarum linearum *af*, *cf* longitudinem nosse volueris, perpendicularis
35 casum, qui in triangulo *bfd* forte ceciderit, taliter addiscas. Superfluum, quod inter basim et abscisionis caput exstiterit, quod est 14, inquirens, utriusque casus proportionem ad illud addisce. Verum in hac caput ab-

---

4 multiplicatio *fehlt.* — 8 et *fehlt.* — 11 colligantur *A.* — 13 multiplicaveris summa. — 32 At si *B.* — id est] idem.

und das ist das Quadrat der Höhe. Multipliciert man in ähnlicher Weise 5, das ist den kleinern Höhenabschnitt, mit sich selbst, so findet man 25, und das von 169, dem Quadrate der kleinern Seite weggenommen, lässt 144 zum Rest, und das ist das Quadrat der Höhe ef, deren Länge 12 ist, wie die der andern Höhe. Den Beweis dafür kann man nach dem Beweise führen, den wir oben bei der ersten Art der Trapeze gezeigt haben.[1])

12. Der Flächeninhalt unseres Trapezes wird als Produkt einer der beiden Höhen mit der Hälfte der Summe der ganzen Grundlinie und des ganzen Kopfes gefunden, wie für das gleichschenklige Trapez.[2])

Addiert man z. B. für dieses Trapez 8, das ist die Länge des ganzen Kopfes, zu 22, der Länge der ganzen Grundlinie, so erhält man 30. Nimmt man nun ihre Hälfte, also 15, und vervielfacht dieses mit 12, das ist mit der Länge der Höhe, so erzeugt das 180, und das ist der Inhalt unseres Trapezes.

13. Sollen die *Diagonalen* derselben Figur gefunden werden, so addiere man die Länge des ganzen Kopfes und des ganzen Höhensegmentes zusammen, multipliciere die Summe mit sich selbst und füge diesem Quadrate das Quadrat der Höhe hinzu. Was man dann erhält, ist das Quadrat der ganzen Diagonale, welche jener Seite anliegt, deren Höhensegment man dem Kopfe hinzugefügt hat.

Zur Auffindung der kürzern Diagonale ad, addiert man also 8, die die Länge des ganzen Kopfes darstellt, zu 5, dem kürzern Höhenabschnitt, und erhält 13. Das Quadrat davon enthält 169. Das Quadrat der Höhe ist aber 144; beide Quadrate zusammengezählt geben 314, und das ist das Quadrat der kleinern Diagonale ad.

Ebenso addiert man zur Bestimmung der grössern Diagonale die Länge 8 des Kopfes, zu 9, dem längern Höhenabschnitt, und findet 17. Das Quadrat davon ergiebt 289. Addiert man hierzu 144, nämlich das Quadrat der Höhe, so findet man 433, und das ist das Quadrat der längeren Diagonale.[3])

14. Will man aber den Scheitel dieses Trapezes bestimmen, das heisst, will man die Grösse der durch Verlängerung der beiden Geraden ba, dc, bis sie in demselben Punkte f zusammenlaufen, entstehenden zwei Geraden af, cf auffinden, so kann man folgendermaassen ergründen, wohin im Dreiecke bfd der Höhenfusspunkt fallen wird. Man suche die Differenz zwischen der Grundlinie und dem Kopfe, sie ist 14, und bestimme das Verhältnis jedes der beiden Höhensegmente zu derselben. Nun ist für unsere Figur der kürzere Höhenabschnitt 5, und das sind $\frac{2}{7} + \frac{1}{14}$ $(\frac{5}{14})$ von jener Differenz.

1) Leonardo 82, 5. 2) Leonardo 82, 9. 3) Leonardo 82, 11.

scissa brevior casus est 5, quae sunt illius superflui duae septimae et semis. Hanc itaque proportionem si de totius basis summa, quae est 22, depresseris, 8 minus septima reperies. Quibus de basi *bd*, quae est 22, ex parte brevioris lateris, id est a puncto *d*, resectis supra punctum *h* sectionis 5 casus reperietur. Lineam igitur *hd* longitudinem 8 minus septima continere non dubites, et hoc est perpendicularis casus ⟨in⟩ triangulo *fbd* ex parte lateris brevioris. Cumque ex linea *hd*, quae est 8 minus septima, lineam *gd*, quae est 5, et hic est casus brevior, depresseris, linea *gh* 3 ulnarum minus septima remanebit, et hoc est superfluum, quod inter 10 casum perpendicularis trianguli et breviorem casum perpendicularis caput abscissae continetur. Hoc itaque superfluum si in latus brevius figurae caput abscissae, quod est 13, multiplicaveris, 37 et septimam procreabis. Cuius numeri summam si per breviorem casum caput abscissae, quae est 5, diviseris, 7 et tres septimas invenies, quod est id, in quo latus trianguli 15 breve | caput abscissae latus excedit, et ipsa est linea *cf* ex parte brevioris lateris producta (Fig. 27). 16'

Item si longiorem *af* lineam nosse cupis, longiorem casum in triangulo, quemadmodum et breviorem, inquirens, eum 14 et septimam continere reperies, ⟨qui⟩ longiorem caput abscissae casum in 5 et septima 20 superabit. Quae si in latus longius, quod est 15, multiplicaveris, 79 ac septimam invenies. Cuius numeri summam si in 9, quae sunt caput abscissae longior casus, diviseris, 8 et quatuor septimae unius exibunt, quod est id, in quo latus trianguli longius caput abscissae longius latus excedit, et ipsum est linea *af*.[1])

25 **15.** Ast si perpendicularis quantitatem non ignorare desideras, superfluum brevioris casus, quae est 3 minus septima, in perpendicularem caput abscissae, quae est 12, multiplica, et quod fuerit, per breviorem casum, qui est 5, partire, vel, si volueris, superfluum longioris casus, quod est 5 et septima, in caput abscissae cathetum, quod est 12, multiplica, et per 30 longiorem casum, qui 9 in se continet, partire. Quocumque istorum modorum operabis, ad idem pervenies, et illud erit 7 minus septima, quod est id, in quo perpendicularis trianguli caput abscissae cathetum excedit. Illud igitur 12, quae sunt caput abscissae cathetus, superadde, indeque collectum

---

2—3 depresserit *A*. — 6 casus] caput. — in *fehlt*. — 13 si per] super *B*. — 17 causam. — 19 qui *fehlt*. — septimam. — 21 summa.

---

1) Leonardo 82, 22.

Nimmt man nach diesem Verhältnis von der ganzen Länge der Grundlinie, das ist von 22, so findet man 8 weniger $\frac{1}{7}$, und schneidet man dieses von der Grundlinie, die 22 beträgt, von der kleinern Seite aus, also vom Punkte d, ab, so findet man im Punkte h den Höhenfusspunkt. Die Strecke hd hat also eine Länge von 8 weniger $\frac{1}{7}$, und das ist der Höhenabschnitt im Dreiecke fbd von der kleinern Seite ab gerechnet. Nimmt man ferner von der Geraden hd, die 8 weniger $\frac{1}{7}$ beträgt, die Gerade gd weg, deren Länge 5 ist, es ist der kleinere Höhenabschnitt (des Trapezes), so bleibt die Strecke gh mit 3 Ellen weniger $\frac{1}{7}$ übrig, das ist also die Differenz zwischen dem Höhenabschnitte des Dreiecks und dem kleinern Höhenabschnitte des Trapezes. Durch Multiplikation dieser Differenz mit der kleinern Seite des Trapezes, nämlich mit 13, entsteht $37\frac{1}{7}$, und dividiert man nun diese Zahl durch den kleinern Höhenabschnitt des Trapezes, der 5 beträgt, so findet man $7\frac{3}{7}$, und das ist der Betrag, um welchen die Seite des Dreiecks die kürzere Seite des Trapezes übertrifft, also der Geraden cf, welche die Verlängerung der kleinern Seite bildet (Fig. 27).

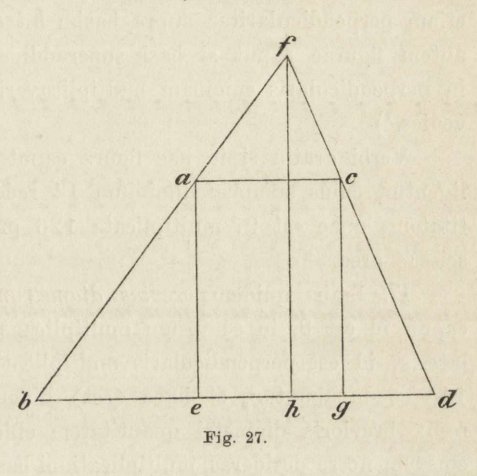


Fig. 27.

Um die längere Linie af zu finden, sucht man in ähnlicher Weise wie den kürzern den längern Höhenabschnitt des Dreiecks, und findet, dass er $14\frac{1}{7}$ enthält. Er übertrifft den längern Höhenabschnitt des Trapezes in $5\frac{1}{7}$. Multipliciert man dies mit der längern Seite, die gleich 15 ist, so findet man $77\frac{1}{7}$, und nach Division durch 9, den längern Höhenabschnitt (des Trapezes), kommen $8\frac{4}{7}$, und um soviel übertrifft die längere Seite des Dreiecks die grössere Seite des Trapezes, und das ist die Gerade af.[1])

15. Soll man aber auch die Länge der Höhe ermitteln, so multipliciere man den Überschuss des kürzern Höhenabschnittes, das ist 3 weniger $\frac{1}{7}$, mit der Höhe des Trapezes, die 12 beträgt, und theile das Ergebnis durch den kleinern Höhenabschnitt, also durch 5, oder, wenn es beliebt, man multipliciere den Überschuss des grössern Höhenabschnittes, das ist $5\frac{1}{7}$, mit der Höhe des Trapezes, also mit 12, und dividiere durch 9, den längern Höhenabschnitt. Auf welche Art man auch vorgeht, kommt man auf dasselbe Ergebnis, das ist auf 7 weniger $\frac{1}{7}$, und das ist der Überschuss der Dreieckshöhe über die Höhe des Trapezes. Addiert man also 12, die Trapez-

19 minus septima continebit, et haec est linea *fh*, quae perpendicularis trianguli dicitur longitudo, quemadmodum in hac figura describitur.

16. Tertiae quidem maneriei est figura caput abscissa, cuius caput et basis sunt aequidistantia, alterumque latus super basim perpendiculariter 5 erigitur. Haec autem figura *semicaput abcissa* nuncupatur. Ad huius itaque similitudinem quaedam *abcd* figura describatur (Fig. 28), cuius caput *ac* 8, basisque *bd* 20, longius quoque latus *ab* 15 brevius vero latus *cd*, quod etiam perpendiculariter supra basim *bd* elevatur, 9 ulnas contineat. Istius autem figurae caput si basi superaddideris et collecti dimidium accipiens 10 in perpendicularis summam multiplicaveris, huius *caput abscissae aream* invenies.[1])

Verbi gratia si in hac figura caput suae basi superadiunxeris, 28 colligentur, cuius summae dimidium 14 reddit, quae in perpendicularis quantitatem, quae est 9, multiplicata 126 procreabunt, et haec est caput ab-15 scissae area.

17. Istius quidem *brevius diametrum,* quod est *ad*, si scire volueris, caput, id est 8, in se ipsum multiplicans 64 invenies. Quibus si brevioris lateris, id est perpendicularis multiplicationem, quae est 81, superadderis, 145 coadunabuntur, et haec ⟨est⟩ diametri multiplicatio. Cuius summae 20 radix brevioris diametri quantitatem efficiet. Verum si *longius diametrum* eiusdem nosse desideras, multiplicationi basis perpendicularis multiplicationem superadde, et inde 481 provenient, quae sunt longioris diametri multiplicatio, ut in hac repraesentatur figura.[2]) | 17

18. Item si huius *caput abscissae perfectionem* habere volueris, quem-25 admodum et in praecedenti caput abscissa monstravimus, operabis, quod est, ut id, in quo basis caput excesserit, quod hac figura 12 fore dicitur, addiscas. Cumque caput in lineam *ab* multiplicaveris et per basis excessum diviseris, illius lineae longitudo proveniet, quae a latere *ab* ad trianguli finem protrahitur. Si autem in perpendicularem *ac* caput duxeris 30 et per basis excessum inde collectum partitus fueris, illius lineae longitudinem, quae a perpendiculari ad finem trianguli producitur, invenies. Tu autem ipse ad aliarum figurarum exemplar tibi figuram formare poteris.[3])

19. Quartae vero maneriei est figura caput abscissa, cuius caput et basis aequidistantia sunt, alterumque duorum laterum supra basim ⟨secun-35 dum⟩ hebetem angulum elevatur. Haec autem caput abscissa duas perpen-

---

4 perpendicularem. — 17 id est] idem. — 19 est *fehlt.* — 27 in eam lineam *B*. — 31 ad perpendicularis ad. — 32 figurarum] figuram. — 34—35 secundum *in A über der Zeile ausradiert.*

---

1) Leonardo 80, 29. 2) Leonardo 81, 5. 3) Leonardo 81, 16 v. u.

höhe, hinzu, so ist die Summe gleich 19 weniger $\frac{1}{7}$, und das ist die Gerade fh, die Länge der Dreieckshöhe, wie in der Figur gezeichnet ist.

16. Die dritte Unterart ist das Trapez, dessen Kopf und Grundlinie parallel sind, und dessen eine Seite senkrecht auf der Grundlinie steht. Dieses Trapez heisst mit *halbabgeschnittenem Kopfe.* Für diese Art werde also die Figur $abcd$ gezeichnet (Fig. 28), deren Kopf ac 8, die Grundlinie bd 20, die längere Seite ab 15, die kürzere Seite cd aber, welche auf der Grundlinie senkrecht steht, 9 Ellen enthalte. Addiert man in dieser Figur den Kopf zur Grundlinie und multipliciert die Hälfte der Summe mit der Höhe, so erhält man den Inhalt des Trapezes.[1])

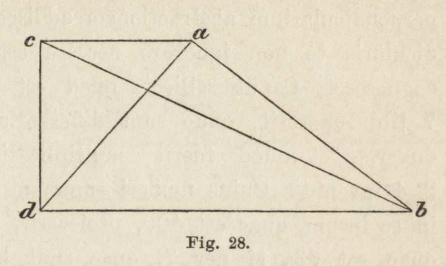


Fig. 28.

Addiert man z. B. in diesem Trapeze den Kopf zur Grundlinie, so erhält man 28. Die Hälfte davon ist 13, und durch Multiplikation derselben mit der Länge der Höhe, das ist mit 9, kommen 126, und das ist der Inhalt unseres Trapezes.

17. Zur Bestimmung der *kleinern Diagonale* ad multipliciert man den Kopf, das ist 8, mit sich selbst, und findet 64. Addiert man hierzu das Quadrat der kleinern Seite, das ist der Höhe des Trapezes, nämlich 81, so ist die Summe 145, und das ist das Quadrat der Diagonale. Um aber die *längere Diagonale* zu bestimmen, addiere man zu dem Quadrate der Grundlinie das Quadrat der Höhe, dann kommen daraus 481, und das ist das Quadrat der grössern Diagonale, wie in der beigegebenen Figur dargestellt wird.[2])

18. Um ferner die *Vollendung des Trapezes* zu finden, verfährt man ebenso, wie wir für die früheren Trapeze gezeigt haben. Man sucht nämlich den Unterschied zwischen der Grundlinie und dem Kopfe, der in unserer Figur gleich 12 ist. Multipliciert man nun den Kopf mit der Geraden ab und dividiert das Produkt durch den Überschuss der Grundlinie, so erhält man den Betrag der Linie, welche als Verlängerung der Seite ab zur Spitze des Dreiecks gezogen ist. Vervielfacht man aber die Höhe mit dem Überschuss der Grundlinie, so findet man die Länge der Geraden, welche als Verlängerung der Höhe bis zur Spitze des Dreiecks gezogen ist. Der Leser aber möge nach dem Beispiele der vorhergehenden Figuren sich selbst die betreffende Figur konstruieren.[3])

19. Die vierte Unterart aber bildet das Trapez, dessen Kopf und Grundlinie parallel sind, und dessen eine Seite mit der Grundlinie einen stumpfen Winkel bildet. Dieses Trapez besitzt zwei Höhen im Innern und

diculares infra se et unam extra continet, vocaturque *caput abscissa* ⟨*declinans*. Ad cuius similitudinem esto caput abscissa⟩ *abcd* (Fig. 29), cuius caput *ac* 14, basis vero *db* 21, longiusque latus *ab* 20, breviusque latus *cd* 15 ulnas amplectitur. Huius nempe caput abscissae aream per suarum perpendicularium abstractionem addiscas, sed prius terminum casus perpendicularis te non ignorare necesse est. Eum igitur sic ratione procedens cognosces. Caput scilicet, quod est 14, de basi, quae est 21, demens, 7 tibi supererit, quae sunt differentia basis. Hanc autem si in se ipsam duxeris, et quod fuerit, multiplicationi brevioris lateris superaddideris, 274 invenies. Cuius numeri summam si ex multiplicatione longioris lateris in se ipsum, quae est 400, proieceris, 126 remanebunt, quorum medietatem, quae est 63, si per 7, quae sunt basis differentia, diviseris, exibunt 9. Quae si differentiae basis, quae 7 sunt, superaddideris, 16 nimirum reperies, quae sunt terminus casus perpendicularis ex parte lineae *ab* longioris. Haec autem superius 9 inventa sunt brevior casus perpendicularis *eg* supra basim *bd* extra figuram elevatae. Eadem scilicet 9 etiam sunt casus interioris perpendicularis *df* supra punctum *d* cadentis.[1]

20. Verum si *perpendicularis longitudinem* nosse desideras, eius quamlibet casum in se ipsum multiplica, et si longiorem casum, quae est 16, multiplicaveris, eius multiplicationis summam ex longioris lateris multiplicatione, scilicet lateris, quod est 20, deme. Si vero breviorem casum multiplicaveris, inde collectum ex brevioris lateris multiplicatione minue, quodque ex quolibet istorum remanserit, 144 continebit, et haec est perpendicularis in semet multiplicatio. Cuius summae radix 12 in se complectitur, quod est perpendicularis longitudo.[2]

21. Istius quippe *caput abscissae aream* ex multiplicatione perpendicularis in totius basis totiusque capitis dimidium, quemadmodum in aliis figuris praemissis, quae caput abscissae dicuntur, indicavimus, agnosces. Erit scilicet area 210.

22. Demonstratio vero istius abstractionis perpendicularis est ut demonstratio diversae caput abscissae superius diligenter ostensa. Cum enim caput ex basis summa diminutum fuerit et 7 reman|serit, erit ille 7 latus trigonii ampligonii, cuius unum latus 7, alterum 15 continet, et haec sunt latera, quae obtuso adiacent angulo. Cuius anguli corda, quae est huius figurae caput abscissae linea *ab*, 20 continere non dubitatur. Quod si in

---

1—2 declinans . . . abscissa *in A auf dem Rande ausradiert.* — 6 procedere. — 10 summa. — 12 exibunt 8 *A.* — 14 casus casus *A.* — 21 scilicet latus. — 34 adiacent] ad invicem.

---

1) Leonardo 82, 11 v. u. 2) Leonardo 83, 4.

eine ausserhalb, es heisst aber Trapez *mit geneigt abgeschnittenem Kopfe*. Nach dieser Art sei ein Trapez $abcd$ (Fig. 29) gezeichnet, dessen Kopf ac 14, die Grundlinie db aber 21, die längere Seite ab 20, die kürzere cd 15 Ellen betrage. Auch dieses Trapezes Flächeninhalt findet man durch Bestimmung seiner Höhen. Dazu muss man aber zunächst den Höhenfusspunkt auffinden. Diesen lernt man auf folgende Art kennen. Den Kopf von 14 Ellen Länge nimmt man von der Grundlinie weg, das ist von 21, es bleiben 7 übrig, der Überschuss der Grundlinie. Ihn multipliciert man mit sich selbst und addiert dazu das Quadrat der kleinern Seite, man erhält so 274. Subtrahiert man das von dem Quadrate der längern Seite, das ist von 400, so bleibt 126 als Rest. Theilt man die Hälfte davon, also 63, durch 7, den Überschuss der Grundlinie, so ist der Quotient 9. Addiert man diesen zu dem Überschuss der Grundlinie 7, so erhält man 16, und das ist die Länge des von der grössern Seite ab aus gerechneten Höhensegmentes. Die oben gefundene 9 aber ist der Abschnitt der kleinern Höhe cg auf der Verlängerung der Grundlinie bd ausserhalb der Figur. Dieselbe 9 ist auch das Höhensegment der innern Höhe df, die im Punkte d errichtet ist.[1])

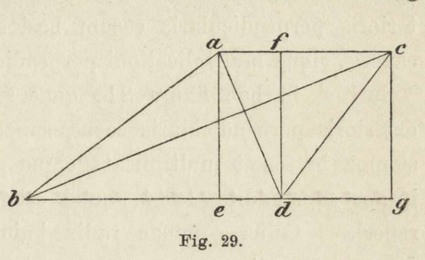


Fig. 29.

20. Zur *Ermittelung der Höhe* selbst vervielfache man einen beliebigen Höhenabschnitt mit sich selbst, und ziehe dieses Quadrat, und zwar, wenn man den längern Abschnitt, also 16, benutzt hat, von dem Quadrate der längern Seite, nämlich dem von 20, ab, wenn man aber den kleinern Abschnitt quadriert hatte, zieht man das Quadrat von dem Quadrate der kleinern Seite ab. Auf beide Arten werden dann gleichmässig 144 übrig bleiben, und das ist das Quadrat der Höhe. Seine Wurzel ist 12, und das ist die Länge der Höhe.[2])

21. Den *Flächeninhalt dieses Trapezes* erhält man durch Multiplikation der Höhe mit der Hälfte der Summe aus der ganzen Grundlinie und dem ganzen Kopfe, wie wir für die früheren Trapezarten gezeigt haben. Derselbe wird übrigens gleich 210 gefunden.

22. Der Beweis für die Berechnung der Höhe ist dem Beweise für die Höhe des Trapezes mit ungleich abgeschnittenem Kopfe ähnlich, den wir oben führten. Wenn man nämlich den Kopf von der Grundlinie abschneidet, so dass 7 Rest bleiben, so ist diese 7 die Seite eines stumpfwinkligen Dreiecks, dessen eine Seite 7, die andere 15 enthält, das sind die beiden Seiten, welche dem stumpfen Winkel anliegen. Die Sehne dieses Winkels aber, es ist die Seite ab des Trapezes, beträgt 20. Fällt man

hoc triangulo ampligonio perpendicularem, extra scilicet triangulum ipsum, erexeris, eius casum exteriorem 9 continere cognosces, sicut superius numerando monstravimus.

23. Huius etiam *caput abscissae longius diametrum* invenies, si exterioris perpendicularis casum basi superaddideris et in se ipsum multiplicaveris, eique multiplicationi perpendicularis multiplicationem superadiunxeris. Veluti si in hac figura 21, quae sunt totius basis summa, 9, quae sunt exterioris perpendicularis casus, superadderis, 30 colliguntur. Cuius numeri summa in semet multiplicata eique perpendicularis multiplicatione in semet ipsam superaddita 1044, quod est totius diametri longioris multiplicatio, reperies. Cuius summae radix huius caput abscissae ⟨diametri⟩ longitudinem a puncto *c* usque ad punctum *b* protracti notificat. Si autem *brevius diametrum,* quod a puncto *a* ad punctum *d* protrahitur, nosse volueris, multiplicationi perpendicularis multiplicationem excessus basis super casum longiorem, qui est 5, superadde, eruntque hae duae multiplicationes in unum collectae 169, quod est brevius diametri multiplicatio, cuius numeri radix est diametri longitudo.[1])

Istius quidem demonstrationem per praemissas demonstrationes intelligeres.

24. In hac autem figura perpendicularis eiusdem caput abscissae idem cum breviori eius diametro multotiens esse poterit. Veluti si in hac alia figura (Fig. 30) longitudo capitis 9, eius basis 16, duorumque reliquorum laterum quantitas eadem, quae est in superiori figura, fuerit, perpendicularem a puncto *a* ad punctum *d* necessario protrahendam et ipsius insuper eandem eiusdem figurae brevius diametrum existere non dubitabis, eritque tunc longioris diametri longitudo, quae a puncto *c* ad punctum *b* distenditur, radix 769, quod est multiplicatio perpendicularis *ad* coniuncta multiplicationi lineae *ac* et lineae *bd*, cum ad unam lineam efficiendam convenerint, et ipsa est figurae caput abscissae, caput et basis.

Tu autem ipse ipsius demonstrationem, si subtiliter observaberis, plane cognosces.

25. *Secundi generis vero figurarum quadrilaterarum,* ut praediximus, illa quadrilatera dicuntur, quorum nulla duo latera sunt aequidistantia. Harum autem figurarum embada nullus nisi per triangulorum, in quibus ipsi dividuntur, areas investigare poterit. Omneque quadrilaterum in duos triangulos resolvitur, et manifestum est, quod, qui illorum triangulorum areas non ignoraverint et eas in unum coadunaverint, quadrilateri emba-

15 eritque *A*. — 21 multotiens] multiplicationes. — 33 nulla] alteri. — 35 poteris.

nun in diesem Dreiecke die ausserhalb derselben gelegene Höhe, so findet man als Betrag des ausserhalb liegenden Höhenabschnittes 9, wie wir oben durch Rechnung gezeigt haben.

23. Die *längere Diagonale des Trapezes* findet man, indem man den äussern Höhenabschnitt zur Grundlinie addiert, das Ergebnis mit sich selbst multipliciert, und hierzu das Quadrat der Höhe addiert. In unserer Figur ergiebt die ganze Grundlinie, nämlich 21, und der äussere Höhenabschnitt, nämlich 9, zusammen 30. Das Quadrat davon und das Quadrat der Höhe zusammengenommen ergeben 1044, und das ist das Quadrat der längern Diagonale unseres Trapezes, derjenigen, welche vom Punkte c nach dem Punkte b gezogen ist. Um aber die *kleinere Diagonale,* die vom Punkte a nach dem Punkte d gezogen ist, kennen zu lernen, addiert man zum Quadrate der Höhe das Quadrat von 5, des Überschusses der Grundlinie über den längern Höhenabschnitt, und beide Quadrate sind zusammen 169, das ist das Quadrat der kleinern Diagonale, und die Wurzel aus dieser Zahl ist die Länge der Diagonale. [1])

Der Beweis dafür ist nach den frühern Beweisen leicht zu verstehen.

24. In einem solchen Trapeze kann übrigens die Höhe oftmals mit der kleinern Diagonale zusammenfallen, wie z. B. in diesem andern Trapeze (Fig. 30), dessen Kopf 9, die Grundlinie 16, die Länge der beiden andern Seiten aber dieselbe ist wie im vorhergehenden Trapeze, die vom Punkte a gefällte Höhe nothwendigerweise durch den Punkt d gehen muss. Sie ist also unzweifelhaft zugleich die kleinere Diagonale des Trapezes. In diesem Falle ist die längere Diagonale gleich $\sqrt{769}$, das ist die Wurzel aus der Summe der Quadrate der Höhe ad und der zu einer Geraden vereinigten Linien ac und bd, welche zugleich die Summe aus dem Kopfe und der Grundlinie ist.

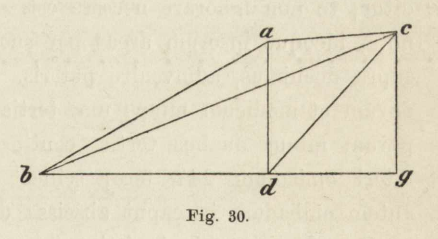


Fig. 30.

25. *Die zweite Art der vierseitigen Figuren* enthält, wie wir schon oben sagten, diejenigen Vierecke, bei denen keine Seite einer andern parallel ist. Den Flächeninhalt solcher Figuren kann niemand, ohne die Inhalte der Dreiecke, in welche sie getheilt werden können, zu Hilfe zu nehmen, berechnen.

Nun kann jedes Viereck in zwei Dreiecke aufgelöst werden, und es ist klar, dass man, wenn man den Inhalt dieser Dreiecke kennt und sie

1) Leonardo 83, 14.

dum, cuius et ipsi partes exstiterint, adinveniet. Hac itaque via omnium quadrilaterorum embada, sive tetragonica, sive parallelogramma, seu quolibet alio, id est diversilateri modo, formata fuerint, adinvenies, praeter quod aequilaterorum atque parallelogrammorum areas aliter etiam adinvenire valebis, nec tibi suorum | triangulorum areas erit numerare necesse. Aliorum vero quadrilaterorum diversorum laterum areae, quorum nulla duo latera sunt aequidistantia, non nisi per triangulos investigantur.

26. Ad cuius rei evidentiam illa, licet non prorsus eadem figura, qua praesens opus terminatum est, quae est quarta caput abscissa declinans, satis ad aliarum figurarum notitiam superficies in exemplari describatur (Fig. 31), cuius latus *ac* 14, latus vero *bd* 21, et latus *ab* 20, latus quoque *cd* 15 mensuras amplectitur. Huius quippe brevius diametrum, quemadmodum numerando superius inveneras, 13 ulnarum exstiterit. Quod si forte in hac eadem figura alius maioris minorisve quantitatis, veluti si 16 ulnarum illud idem diametrum inveneris, hanc figuram nequaquam caput abscissam nuncupabis. Nulla etenim eius latera erunt aequidistantia. Nam si qua eius latera aequidistantia forent, eiusdem diametra nullatenus a praedictis quantitatibus deviarent. Quapropter duorum triangulorum *abd*, *adc* embada, in quibus hoc quadrilaterum a diametro supra protracto dividitur, te non ignorare necesse est. Horum autem triangulorum latera sunt nota, ideoque ipsorum areas per suorum perpendicularium inventionem; ut supra docuimus, adinvenire poteris. Embadum igitur trianguli *adb* ⟨96 ulnarum et modicum minus una tertia, embadum vero trianguli *adc*⟩ 150 et parum minus duabus tertiis continere reperies. Erit itaque totius quadrilateri embadum 247 fere, scilicet quia parum minus continetur. Eius autem embadum in caput abscissa declinantis dispositione 210 ulnarum invenies. Verum quia in istius figurae dispositione diametrum crevit, et eius embadum similiter suscepit augmentum. Si vero diminutionem accepisset diametrum, et embadi quantitas similiter.[1])

27. Quapropter perpendicularis hanc regulam assignare poteris. *Omne quadrilaterum, cuius diametrum protrahitur, in duobus triangulis resolvitur, cumque in utroque triangulo perpendicularem supra diametro erexeris et utriusque perpendicularis summam in unum coadunaveris, collectique dimidium acceperis et illud in totius diametri summam multiplicaveris, vel si*

---

2 paralellograma *und so immer.* — 8 qua] quam. — 16 nuncubabis *A.* — erit. — 22—23 96 ulnarum ... trianguli *adc in A auf dem Rande ausradiert.* — 26 dispositio. — 32—33 et ut utriusque.

---

1) Leonardo 83, 21.

dann zusammenfasst, den Inhalt des Viereckes, dessen Theile sie sind, gefunden hat. Auf diesem Wege kann man also den Inhalt sämmtlicher Vierecke bestimmen, mögen es nun Quadrate oder Parallelogramme sein, oder mögen sie auf irgend eine andere Art als ungleichseitig gebildet sein, nur dass man den Inhalt der gleichseitigen Vierecke und Parallelogramme auch auf andere Weise zu bestimmen vermag, und man nicht nöthig hat, die Flächen ihrer Dreiecke zu berechnen, während die Flächeninhalte der andern ungleichseitigen Vierecke, bei denen keine Seite einer andern parallel läuft, sich nur durch die Dreiecke finden lässt.

26. Zum Augenscheine zeichne man die Gestalt der, wenn auch nicht in allen Stücken, gleichen Figur nochmals, mit welcher wir die vorhergehende Theorie beschlossen haben, die der vierten Unterart der Trapeze, da sie zur Kenntnis auch anderer Figuren hinreicht (Fig. 31). Ihre Seite *ac* enthalte 14, die Seite *bd* 21, die Seite *ab* 20 und die Seite *cd* 15 Maasseinheiten. Die kürzere Diagonale fanden wir oben zu 13 Ellen. Fände man nun diese Diagonale in derselben Figur von grösserem oder kleinerem Betrage, etwa von 16 Ellen, so kann man das Viereck keinesfalls ein Trapez nennen, denn es ist dann keine Seite einer andern parallel.

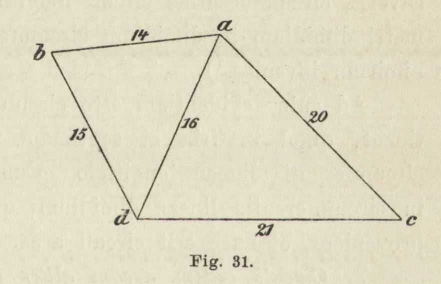


Fig. 31.

Wären nämlich die beiden Seiten parallel, so könnten die beiden Diagonalen in keiner Weise von den frühern Beträgen abweichen. Man muss also hier die Flächenräume der beiden Dreiecke *abd*, *adc* kennen, in welche das Viereck durch die oben gezogene Diagonale zerfällt. Nun kennt man die Seiten dieser Dreiecke, man kann also auch ihre Flächeninhalte durch Bestimmung ihrer Höhen, wie wir oben gesagt haben, finden. Der Inhalt des Dreiecks *adb* ist aber 96 und eine Kleinigkeit weniger als $\frac{1}{3}$ Quadratelle, der Inhalt des Dreiecks *adc* jedoch 150 und etwas weniger als $\frac{2}{3}$, also ist der Inhalt des ganzen Vierecks nahezu 247, da er nur um eine Kleinigkeit weniger enthält. In der Gestalt eines geneigten Trapezes aber wäre der Inhalt nur 210 Quadratellen. Da aber bei der Anordnung unserer Figur die Diagonale sich vergrösserte, so wuchs dementsprechend auch der Inhalt. Hätte sich aber die Diagonale verringert, so hätte das auch der Inhalt entsprechend gethan.[1])

27. Man kann also folgende Regel für die Höhe angeben. *Durch Ziehen einer Diagonale wird jedes Viereck in zwei Dreiecke getheilt. Fällt man nun in jedem dieser Dreiecke die Höhe auf die Diagonale, addiert die Beträge der beiden Höhen zusammen, und multipliciert die Hälfte der Summe mit der ganzen Länge der Diagonale, oder multipliciert die ganze Summe*

utriusque perpendicularis summam in totius diametri dimidium duxeris, quadrilateri aream nimirum invenies.

Ad harum itaque figurarum notitiam cum ista sufficiant, plura tibi monstrare supervacaneum ducimus. Tertiae igitur particulae quadrilatero-
5 rum hoc in loco finem congruum imponentes, quartae partis notitiam, qua circulares ac semicirculares figuras, et quae sunt plus minusve semicirculo, metiri possumus, deo adiuvante monstrabimus.

Pars quarta in arearum camporum circularium ac semicircularium, | et quorum formae sunt plus minusue semicirculo perfecto, 18′
10 *cognitione.*

1. *Perfecti quidem circuli aream nosse poteris,* si eius diametri cognitionem habueris. Igitur si diametri summam in 3 et septimam multiplicaveris, circumferentiae circuli longitudinem reperies. Qua inventa, si diametri dimidium in dimidium circumferentis lineae duxeris, circuli embadum
15 nimirum invenies.[1])

Ad cuius evidentiam esto circulus (Fig. 32), cuius diametrum 14 contineat, quod in tria et septimam multiplicatum 44 reddet, et haec est circumferentis lineae longitudo. Cumque diametri dimidium, quod est 7, in circumferentis lineae dimidium, quod est 22, multiplicaveris, 154 inde
20 provenient, et haec erit circuli area.

2. *Circuli autem aream aliter absque circumferentis lineae cognitione sic investigare poteris.* Diametrum scilicet in se ipsum multiplicans ex inde collecto septenam septenaeque partis dimidium deme, et reliquum erit totius circuli area. In hac namque supradicta similitudine totius diametri in
25 semet multiplicationem 196 continere reperies. De cuius numeri summa si septenam septenaeque partis dimidium, quod est 42, depresseris, 154, sicut et supra, relinquentur, et hoc erit circuli embadum.[2])

3. Haec autem numeratio fit, secundum quod circumferentem circuli lineam suo diametro triplam septima superaddita confitentur, ideoque, si
30 ex diametri multiplicatione septimam septimaeque dimidium minueris, embadum invenies. Illi vero, qui subtiliter circulum numerare nituntur, et sunt illi, qui stellarum loca veraciter inveniunt, circumferentem circuli

---

6 deo] χ̄po. *Da* Savasorda *als Jude jedenfalls dieses letztere Wort nicht gebraucht hat, so habe ich diese dem Übersetzer oder Abschreiber zur Last fallende Ausdrucksweise in obiger Art umgeändert.* — 8 *B. setzt vor dieser Zeile noch hinzu:* Pars quarta secundae partis. — 21 cognitionem. — 25 multiplicatione.

---

1) Leonardo 86, 16. D. h. $\pi = 3\frac{1}{7}$, $J = \frac{d}{2} \cdot \frac{P}{2}$.

2) Leonardo 86, 20. $J = \frac{11}{14} d^2$.

der Höhen mit der Hälfte der Diagonale, so findet man sicher den Inhalt des Vierecks.

Da das Gesagte zur Kenntnis dieser Figuren ausreicht, halten wir für überflüssig noch mehr auszuführen. Indem wir daher an diesem Orte dem dritten Theile über Vierecke ein Ziel setzen, wollen wir mit Gottes Hilfe im vierten Theile zeigen, wie man die kreisförmigen und halbkreisförmigen Figuren, und die, welche mehr oder weniger als ein Halbkreis betragen, auszumessen im stande ist.

Vierter Theil: Bestimmung der Inhalte von kreisförmigen und halbkreisförmigen Feldern und solchen, welche mehr oder weniger sind als ein vollständiger Halbkreis.

1. *Den Flächeninhalt eines Vollkreises* kann man finden, wenn man die Länge des Durchmessers desselben kennt. Vervielfacht man nämlich die Länge des Durchmessers mit $3\frac{1}{7}$, so erhält man die Länge des Kreisumfangs. Hat man diese gefunden, und multipliciert dann den Halbmesser mit dem halben Umfang, so findet man sicher den Inhalt.[1])

Zur genauern Erkenntnis sei ein Kreis gegeben, dessen Durchmesser 14 enthalte, das giebt mit $3\frac{1}{7}$ multiplicirt 44, und das ist die Länge des Umfangs. Wenn man nun den Halbmesser, also 7, mit dem halben Umfange, nämlich 22, multipliciert, so kommen 154, und das ist der Inhalt des Kreises.

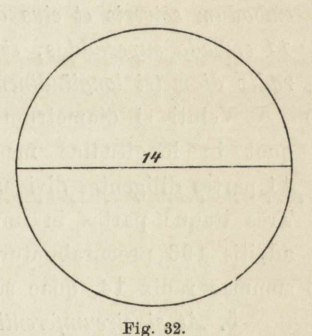


Fig. 32.

2. *Den Inhalt des Kreises kann man aber auch ohne Kenntnis des Umfangs folgendermaassen auffinden.* Man multipliciere den Durchmesser mit sich selbst und vermindere das Ergebnis um den siebenten Theil und die Hälfte des siebenten Theiles ($\frac{3}{14}$), so ist der Rest der Inhalt des ganzen Kreises. In dem obigen Beispiele findet man nämlich das Quadrat des Durchmessers gleich 196. Zieht man hiervon $\frac{3}{14}$, das sind 42, ab, so bleiben 154 übrig wie vorher, und das ist der Inhalt des Kreises.[2])

3. Diese Rechnung geschieht nach dem Verhältnis, dass der Umfang als das $3\frac{1}{7}$-fache des Durchmessers angenommen wird, dann findet man nämlich den Inhalt, indem man $\frac{3}{14}$ von dem Quadrate des Durchmessers wegnimmt. Diejenigen aber, welche den Kreis genauer zu berechnen versuchten (es sind das jene, welche die Örter der Sterne genau aufzufinden lehren), sagen, der Umfang des Kreises enthalte das Dreifache seines Durch-

lineam suo diametro triplum et insuper 8 et dimidium de 60 diametri partibus continere pronunciant. Quapropter secundum eos non est haec numeratio ⟨facienda, sed ut antea ex diametri multiplicatione quarta pars minus 8 partibus et dimidium de eiusdem⟩ quartae partibus est minuenda, et reliquum erit circuli embadum. Veluti si in eodem supradicto exemplo ex diametri multiplicatione, quae 196 continet, quartam partem eius minus 8 partibus et dimidia de 60 ⟨eiusdem quartae partibus depresseris, quod est 42 ulnarum et 3 partium et dimidii de 60⟩ unius ulnae partibus, 154 minus tribus partibus et dimidia de 60 unius ulnae partibus remanebunt, et hoc erit circuli embadum. Verum quia inter has duas numerationes adeo minima differentia reperitur, quod nec etiam ad dimidium octavae partis unius ulnae ex 154 ulnis pervenerit, et huiusmodi differentia modicum in numerando confert, hac in scientia parvissimi difficultatem vitare volentes, primum numerandi modum sumus prosecuti.[1])

4. Igitur si diametri longitudinem cognoveris, circuli embadum absque suae circumferentiae numerositate non ignorare poteris. *Cumque circuli embadum sciveris et eius diametri longitudinem nosse volueris, tres partes de 11 embado superaddas, et diametri multiplicationem invenies, cuius summae radix diametri longitudinem continebit.*[2]) | 19

Veluti si diametrum circuli, cuius embadum 154 ulnas amplectitur, quot in longitudine mensuras contineret, quaeratur, hoc embadum in 11 partes diligenter dividas, et eius undecimam partem 14 continere reperies. Tres itaque partes in unum collectae 42 continebunt, quibus 154 superadditis 196 procurabuntur, et haec est totius diametri multiplicatio, cuius summae radix 14, quae sunt diametri longitudo, sibi connumerabit.

5. *At si circumferentis lineae summam noveris et diametri quantitatem scire volueris,* 7 partes de 22 partibus circumferentiae sumas, vel circumferentem lineam in 3 et septimam partiaris, et diametrum invenies. Quodcumque istorum feceris, ad idem pervenies. Veluti si diametrum circumferentis lineae, quae 44 ulnarum existiterit, quot in sui longitudine mensuras contineat, quaeratur, ex praedictis 44 septem partes de 22 partibus accipiens 14 reperies, quae sunt diametri longitudo. Similiter etiam si 44 in 3 et septimam diviseris, diametri longitudinem 14 continere non dubitabis.[3])

6. *Item quaerenti de circulo, cuius diametrum in 11 multiplicatum eius embadum perficit, quot in sui diametro mensuras recipiat,* sic respondeas.

3—4 facienda ... eiusdem *in A auf dem Rande ausradiert.* — 7—8 eiusdem ... de 60 *in A auf dem Rande ausradiert.* — 14 sumus] sunt. — 17 longitudine. — 21 embadum] exemplum *A*.

messers und ausserdem $8\frac{1}{2}$ Sechzigstel desselben. Nach ihnen darf man also obige Rechnung nicht machen, sondern man muss, ähnlich wie oben, von dem Quadrate des Durchmessers den vierten Theil weniger $8\frac{1}{2}$ Sechzigstel dieses vierten Theiles $(\frac{13}{120})$ wegnehmen; der Rest ist dann der Inhalt des Kreises. Wenn z. B. im obigen Beispiele vom Quadrate des Durchmessers, das 196 beträgt, der vierte Theil weniger $8\frac{1}{2}$ Sechzigstel dieses vierten Theiles, das sind 42 Ellen und $3\frac{1}{2}$ Sechzigstel einer Elle, weggenommen werden, so bleiben 154 Ellen weniger $3\frac{1}{2}$ Sechzigstel einer Elle übrig, und das wäre der Inhalt des Kreises. Da aber zwischen diesen beiden Zahlenwerthen eine so geringfügige Differenz besteht, die noch nicht einmal die Hälfte einer achtel Elle bei 154 Ellen erreicht, und ein so mässiger Unterschied nur wenig beim Rechnen ausmacht, so werden wir die erste Rechnungsart weiter benutzen, da wir bei dieser Lehre die Schwierigkeit solcher kleinen Zahlen vermeiden wollen.[1])

4. Kennt man also die Länge des Durchmessers, so kann man auch seinen Inhalt ohne Kenntnis des Umfanges bestimmen. *Hat man aber den Inhalt des Kreises, und sucht die Länge des Durchmessers, so addiert man zu dem Inhalte $\frac{3}{11}$ desselben, und erhält damit das Quadrat des Durchmessers. Die Wurzel desselben zeigt die Länge des Durchmessers an.*[2])

Wenn etwa gefragt würde, wieviele Maasseinheiten die Länge des Durchmessers enthält, dessen Inhalt 154 Quadratellen umfasst, so theilt man diese Zahl genau in 11 Theile, und findet, dass ein Elftel 14 enthält. Drei solche Theile zusammengenommen sind also gleich 42, und zählt man dies zu 154 hinzu, so kommt 196, das Quadrat des Durchmessers, und die Wurzel aus dieser Zahl, das ist seine Länge, beträgt 14.

5. *Kennt man aber die Grösse des Umfanges und sucht die Länge des Durchmessers,* so nehme man $\frac{7}{22}$ des Umfangs oder theile den Umfang durch $3\frac{1}{7}$, und findet so den Durchmesser. Welche Methode man auch wählt, man gelangt zu demselben Ergebnis. Wird z. B. gefragt, wieviel Maasseinheiten der Durchmesser enthalte, wenn der Umfang 44 Ellen Länge besitzt, so erhält man 14, wenn man $\frac{7}{22}$ von diesen 44 nimmt, und das ist die Länge des Durchmessers. Dividiert man ähnlich 44 durch $3\frac{1}{7}$, so findet man auch auf diese Weise, dass die Länge des Durchmessers 14 beträgt.[3])

6. *Wenn man fragt, wieviel Maasseinheiten der Durchmesser eines Kreises enthält, wenn dieser Durchmesser mit 11 multipliciert den Inhalt*

---

1) Das ist der Werth des Ptolemäus $\pi = \frac{377}{120}$, $J = \frac{377}{480} d^2$.

2) Leonardo 86, 6 v. u. $d = \frac{7}{22} P = P : 3\frac{1}{7}$.

3) Savasorda hat hier die oben gegebene Formel $J = \frac{d}{2} \cdot \frac{P}{2}$ in $J = d \cdot \frac{P}{4}$ umgewandelt, was sonst im Mittelalter nicht vorkommt.

Cum diametri multiplicationem in quartam sui circumferentiae partem ipsius circuli embadum complere manifestum sit, et in hac quaestione diametrum in 11 multiplicatum sui circuli aream efficere proclamatur, quartam ipsius circumferentis lineae partem 11 mensuras continere non est ambiguum. Igitur si 11 in 4 multiplicaveris, 44, quae sunt circumferentis lineae summa, reperies, quam si in 3 et septimam diviseris, exibit diametri longitudo.[1])

7. Huc usque perfecti circuli dimensionibus ostensis ad portionum circuli dimensiones arcuum formas habentium transitum faciamus. Circulorum itaque portiones sicut et omnium figurarum in tria dividuntur. Quaedam etenim *semicirculum,* quaedam *minus,* quaedam *plus semicirculo* continebunt. Harum autem portionum singulae *cordam* et *sagittam* habere dicuntur.

Igitur eius *corda est linea recta ab altero fine arcus ad alterum finem protracta,* et eiusdem vero *sagitta est linea recta a praedictae cordae dimidio usque ad arcum secundum rectum angulum elevata.*

Cumque dimidio cordae sagitta aequalis exstiterit, erit arcus ille semicirculus; si autem minor ea fuerit, erit et ipse minor semicirculo; verum si maior apparuerit, et ipse arcus semicirculo maior apparebit.

8. Sit igitur exempli causa circuli portio $\widehat{abc}$, cuius corda adc 8, eiusque sagitta db 4 ulnas contineat: erit ergo *semicirculus.* Cuius embadum si nosse deside|ras, dimidium eius cordae, quae est circuli diametrum, in arcus dimidium multiplica, et semicirculi embadum exibit (Fig. 33).[2])

9. Arcus vero summam si nosse cupis, dimidium cordae, quae est 4, in 3 et septimam multiplica, et 12 ulnas quatuorque septenas invenies, et haec est ipsius arcus, totius circumferentiae dimidium in se continentis quantitas. Huius quidem arcus dimidium, 6 scilicet duasque septimas, assumens in 4, quae sunt totius cordae dimidium, multiplica, et 25 ac unius septimam invenies, quod est semicirculi embadum.

10. Aliter etiam embadum scire poteris, scilicet si cordam in semet multiplicaveris et ex inde collecto septimam septimaeque dimidium abstuleris, residuique dimidium acceperis, semicirculi aream nimirum reperies. Quare si 8 praefatas ulnas in semet duxeris, 64 innascentur, de cuius numeri summa si septimam septimaeque partis dimidium, quod est 13 ulnas et 5 septimas, abstuleris, 50 ulnae et duae septimae remanebunt, cuius summae

3 procreatur. — 6 summam. — 33 12 ulnas.

1) LEONARDO 92, 4. Man beachte die Bezeichnung der zum Theil krummlinig begrenzten Figur durch $\widehat{abc}$ im Gegensatze zu dem geradlinigen Dreiecke abc.

2) $d = \sqrt{1\frac{3}{11} J}$.

ergiebt, so ist die Antwort folgende. Da das Produkt aus dem Durchmesser und dem vierten Theile seines Umfanges den Inhalt des Kreises erzeugt, so ist klar, da nach obiger Frage der Durchmesser mit 11 vervielfacht den Inhalt des zugehörigen Kreises ausmachen soll, dass der vierte Theil des Umfanges 11 Maasseinheiten enthält. Multipliciert man also 11 mit 4, so findet man als Länge des Umfanges 44, und dividiert man das durch $3\frac{1}{7}$, so kommt die Länge des Durchmessers.[1])

7. Bisher haben wir die Ausmessung des Vollkreises gelehrt, nun wollen wir zur Ausmessung der Kreisabschnitte, welche die Form von Kreisbogen haben, übergehen. Die Kreisabschnitte werden wie alle solche Figuren in drei Arten getheilt. Einige nämlich enthalten einen *Halbkreis,* einige *weniger,* einige *mehr als einen Halbkreis.* Von jedem solchen Abschnitte sagt man, er besitze eine *Sehne* und einen *Pfeil.*

Sehne desselben ist nämlich die gerade Linie, welche von einem Endpunkte des Bogens nach dem andern gezogen ist;

Pfeil desselben aber ist die gerade Linie, welche im Halbierungspunkte der Sehne bis zum Bogen senkrecht errichtet ist.

Ist der Pfeil der Hälfte der Sehne gleich, so ist der Bogen ein Halbkreis; ist er kleiner als die Hälfte, so ist der Bogen ebenfalls kleiner als der Halbkreis; ist er aber grösser, so ist der Bogen auch grösser als der Halbkreis.

8. Um ein Beispiel zu zeigen, sei der Kreisabschnitt $\widehat{abc}$ vorgelegt, seine Sehne adc enthalte 8, der Pfeil db 4 Ellen: es ist also *ein Halbkreis.* Um seinen Inhalt zu finden, multipliciere man die Hälfte seiner Sehne, die zugleich Durchmesser des Kreises ist, mit der Hälfte des Bogens, so kommt der Inhalt des Halbmessers (Fig. 33).[2])

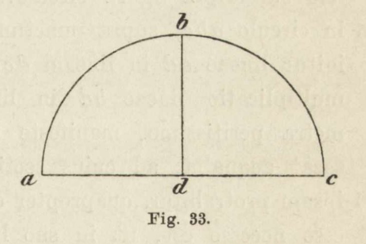


Fig. 33.

9. Um aber die Länge des Bogens zu bestimmen, vervielfache man die halbe Sehne, das ist 4, mit $3\frac{1}{7}$, so erhält man $12\frac{4}{7}$ Ellen, und das ist die Grösse des Bogens, der die Hälfte des ganzen Umfanges in sich fasst. Die Hälfte dieses Bogens, das ist $6\frac{2}{7}$, multipliciere man nun mit 4, das ist der Hälfte der Sehne, und man erhält $25\frac{1}{7}$ als Inhalt des Halbkreises.

10. Den Inhalt kann man auch auf andere Weise bestimmen. Wenn man nämlich die Sehne mit sich selbst vervielfacht, von dem Quadrate $\frac{3}{14}$ abzieht und von dem Reste die Hälfte nimmt, so findet man ohne weiteres den Inhalt des Halbkreises. Wenn man also die 8 obengenannten Ellen mit sich selbst vervielfacht, so entstehen 64. Zieht man hiervon $\frac{3}{14}$ ab, das ist $13\frac{5}{7}$ Ellen, so bleiben $50\frac{2}{7}$ Ellen übrig. Die Hälfte dieser Grösse,

dimidium, quod est 25 et unius insuper septima, semicirculi embadum complet. Hac itaque via semicirculi embadum addiscere ⟨poteris⟩, et haec est semicirculi figura.

11. Ad illius autem portionis similitudinem, quae semicirculo minor existit, $\widehat{abc}$ constituatur, cuius corda *ac* 8, eiusque sagitta *db* 2 mensuras in se contineat. Haec quidem portio non est semicirculus, sed minor semicirculo, eo quod ipsius sagitta eiusdem cordae minor invenitur. Huius autem portionis aream absque illius circuli, cuius portio est, diametri cognitione scire non poteris. Circuli vero diametrum addiscas, si cordae dimidium in semet multiplicaveris, et quod fuerit, per sagittae summam diviseris, quodque exierit, toti summae sagittae superaddideris. Illud etenim, quod inde collectum fuerit, erit totius diametri quantitas (Fig. 34).[1]

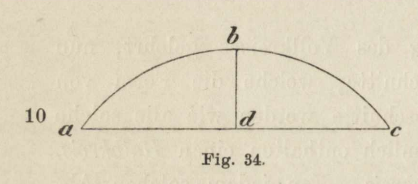


Fig. 34.

Verbi gratia si hac in portione dimidium cordae, quod est 4, in se ipsum multiplicaveris, 16 invenies, cuius numeri summam si in duo, quae sunt sagittae quantitas, diviseris, 8 nimirum exibunt. Quibus superadditis 2, quae sunt sagittae longitudo, 10, quae sunt summa diametri illius circuli, cuius haec est portio, colligentur.

Istius quippe numerationis demonstrationem si nosse desideras, huius portionis circulum perficiens (Fig. 35) sagittam *bd* ex altera parte usque ad circumferentem lineam protrahas ad similitudinem lineae *bdf*, quae in hac subscripta figura circulari protracta est, eruntque duae lineae *ac*, *bf* in circulo *abcf* supra punctum *d* sese invicem abscinden|tes. Multiplicatio igitur lineae *ad* in lineam *dc*, quae sibimet invicem sunt aequales, erit ut multiplicatio lineae *bd* in lineam *df*, quemadmodum ab Euclide, geometra peritissimo, manifeste monstratur. Linea *df* ⟨lineam⟩ *ac* in duo secat aequalia, ad cuius sectionis dimidio linea *bf* perpendiculariter super ipsam protrahitur, quapropter eam per centrum transire et circuli diametrum esse necesse est, ut in suo libro dictus Euclides ostendit. Huius itaque circuli diametrum 10 continere mensuras nulli dubium est.

12. His ita repertis, si eiusdem portionis embadum nosse volueris,

---

2 poteris *fehlt.* — 16 est cordae 4. — 28 lineam *fehlt.*

---

1) Savasorda kennt also die Beziehungen zwischen Halbsehne, Sagitta und Durchmesser. Am Schlusse des Kapitels kommt er nochmals darauf zurück und bezieht sich zum Beweise ausdrücklich auf Euklides.

das ist $25\frac{1}{7}$, macht den Inhalt des Halbkreises aus. Auf diese Art kann man also den Inhalt eines Halbkreises finden, und das ist die Figur des Halbkreises.

11. Als Beispiel eines Kreisabschnittes, der kleiner als ein Halbkreis ist, sei $\widehat{abc}$ gezeichnet, dessen Sehne *ac* 8, der Pfeil *db* 2 Maasseinheiten in sich fasse. Dieser Abschnitt ist kein Halbkreis, sondern kleiner als ein Halbkreis, weil sein Pfeil kleiner als die Hälfte seiner Sehne ist. Der Inhalt dieses Abschnittes lässt sich aber ohne Kenntnis des Durchmessers des Kreises, von dem er ein Theil ist, nicht bestimmen. Den Kreisdurchmesser findet man aber, wenn man die halbe Sehne mit sich selbst vervielfacht, das entstehende Quadrat durch die Länge des Pfeils dividiert, und das Ergebnis der ganzen Länge des Pfeiles hinzuzählt, denn diese Summe ist die Länge des Durchmessers (Fig. 34).[1])

Multipliciert man z. B. die Hälfte der Sehne des gegebenen Abschnittes, die 4 beträgt, mit sich selbst, so findet man 16; dividiert man das durch 2, die Länge des Pfeiles, so kommen 8, und das zu 2, nämlich zu der Länge des Pfeiles, hinzugelegt, macht zusammen 10, das ist die Länge des Durchmessers des Kreises, zu welchem der gegebene Abschnitt gehört.

Zum Beweise dieser Berechnung vollende man den zu dem Abschnitte gehörigen Kreis (Fig. 35), und verlängere den Pfeil *bd* nach der andern Seite bis zum Umfange; wie die Gerade *bdf* zeigt, die in der nebenstehenden Figur des Kreises gezogen ist. Dann schneiden sich die beiden Geraden *ac*, *bf* im Kreise *abcf* im Punkte *d*, also ist das Produkt aus der Geraden *ad* und der Geraden *dc*, die einander gleich sind, gleich dem Produkte der Geraden *bd* und der Geraden *df*, wie von Euklides, dem erfahrensten Geometer, klar bewiesen ist. Die Gerade *df* schneidet die Gerade *ac* in zwei gleiche Theile, und in diesem Halbierungspunkte ist die Gerade *bf* senkrecht auf derselben errichtet, sie muss daher durch den Mittelpunkt gehen und Durchmesser des Kreises sein, wie der ebengenannte Euklides in seinem Buche gezeigt hat. Dass also der Durchmesser dieses Kreises 10 Ellen enthält, kann nicht zweifelhaft sein.

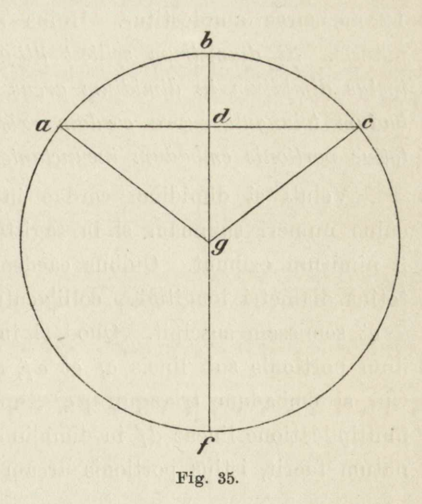


Fig. 35.

12. Will man nach Bestimmung des Durchmessers den Inhalt des Ab-

lineam bf in duo aequa supra punctum g, quod est circuli centrum, partiaris, a quo scilicet puncto duas ag, gc lineas ad duo puncta a, c dirigas, cumque lineam ag, quae est diametri dimidium, in dimidium arcus $\overset{\frown}{ac}$, quod est $\overset{\frown}{ab}$, multiplicaveris, embadum trianguli, cuius duo latera sunt lineae ag, gc, eiusque basis est arcus $\overset{\frown}{abc}$, reperies. De cuius numeri summa si trianguli agc aream abstuleris, embadum portionis $\overset{\frown}{abcd}$ remanebit. Huius autem trigoni embadum, quod est 12, est multiplicatio lineae gd, quae hac in figura trium existit ulnarum, in dimidium lineae ac, quod 4 ulnas amplectitur, et ipsum videlicet embadum ⟨est⟩ illa quantitas, quae ex multiplicatione rectae lineae ag in lineam $\overset{\frown}{ab}$ circularem proicitur. Reliquum itaque portionis $\overset{\frown}{abcd}$ aream complet.[1])

Manifestum est igitur, quod *in omni circuli portione, quae semicirculo minor exstiterit, si circuli, cuius ipsa portio fuerit, diametri dimidium in dimidium arcus eiusdem portionis duxeris, et quod fuerit, seorsum servaveris, post haec ex diametri dimidio sagittae summam proieceris, residuumque in cordae dimidium multiplicaveris, et, quod fuerit, ex servata quantitate depresseris, reliquum eiusdem portionis embadum fore non dubites.*

13. Item ad exemplar illius portionis circuli, quae semicirculo maior fuerit, $\overset{\frown}{abc}$ portio constituatur, cuius corda ac 12, eiusque sagitta bd 12 mensuras amplectitur. Huius autem portionis embadum taliter scire poteris. *Si diametrum scilicet illius circuli, cuius portio est, produxeris et ipsius dimidium in dimidium arcus multiplicaveris, eique multiplicationi embadum trianguli supra cordam existentis superadiunxeris, inde coadunatum totius portionis embadum incunctanter efficiet.*

Veluti si dimidium cordae in se ipsum multiplicaveris, 36 invenies, cuius numeri summam si in sagittae quantitatem, quae est 12, diviseris, 3 nimirum exibunt. Quibus eaedem sagittae superadditis, 15, quae sunt totius diametri longitudo, colli|gentur, cuius dimidium, quod est linea bf, 7 et semissem suscipit. Quod si in dimidium arcus multiplicaveris, embadum portionis sub lineis cf et af, nec non et arcu $\overset{\frown}{abc}$ contentae reperies. Cui si embadum trianguli acf superaddideris, et ipsum est id, quod ex multiplicatione lineae df in dimidium lineae ac colligitur, quod inde coadunatum fuerit, istius portionis aream complebit (Fig. 36).

---

2 duas scilicet puncta ag, gc. — 6 triangulum. — 9 est *fehlt*. — 23 inde] n̄ *A*.

---

1) Leonardo 100, 4 v. u. Die *Portio minor* ist also gleich dem Kreisausschnitt *minus* dem durch die Sehne und die Radien gebildeten Dreiecke.

schnittes finden, so halbiere man die Gerade bf im Punkte g, das ist der Mittelpunkt des Kreises, und ziehe von diesem Punkte die beiden Geraden ag, gc nach den beiden Punkten a und c. Wenn man dann die Linie ag, die gleich dem Halbmesser ist, mit der Hälfte des Bogens $\overset{\frown}{ac}$, das ist mit $\overset{\frown}{ab}$ multipliciert, so erhält man den Inhalt des Dreiecks, dessen beide Seiten die Geraden ag, gc sind, und als dessen Grundlinie man den Bogen $\overset{\frown}{abc}$ findet. Zieht man von diesem Produkte die Fläche des Dreiecks agc ab, so bleibt der Inhalt des Kreisabschnittes $\overset{\frown}{abcd}$ übrig. Der Inhalt des genannten Dreiecks ist 12, er ist nämlich das Produkt der Geraden gd, die in unserer Figur 3 Ellen lang ist, mit der Geraden ac, welche 4 Ellen enthält, und der obige Flächeninhalt ist die Grösse, welche aus der Multiplikation der geraden Linie ag mit dem Kreisbogen $\overset{\frown}{ab}$ entsteht. Der Rest macht daher die Fläche des Abschnittes $\overset{\frown}{abcd}$ aus. [1])

Es ist also klar, *dass, wenn man für jeden Kreisabschnitt, der kleiner ist als ein Halbkreis, den Halbmesser des Kreises, dessen Abschnitt er ist, mit der Hälfte des Bogens des Abschnittes vervielfacht und das Produkt sich merkt, dann die Länge des Pfeiles von dem Halbmesser wegnimmt, und den Rest mit der halben Sehne multipliciert, das Ergebnis aber von dem gemerkten Produkte subtrahiert, der Rest zweifellos den Inhalt des Kreisabschnittes bildet.*

13. Als ein Beispiel eines Kreisabschnittes, der grösser ist als ein Halbkreis, zeichne man einen Abschnitt $\overset{\frown}{abc}$, dessen Sehne ac 12, sein Pfeil bd ebenfalls 12 Maasseinheiten umfasst. Den Inhalt dieses Abschnittes kann man folgendermaassen bestimmen. *Zieht man nämlich den Durchmesser des Kreises, zu welchem er gehört, multipliciert dessen Hälfte mit der Hälfte des Bogens und addiert zu dem Produkte den Inhalt des Dreiecks, das über der Sehne steht, so macht die Summe den Inhalt des ganzen Abschnittes aus.*

Wenn man hier die Halbsehne mit sich selbst vervielfacht, so findet man 36, Division dieser Grösse durch die Länge des Pfeiles, nämlich 12, ergiebt 3. Dies zu dem Pfeile addiert liefert 15, und das ist die ganze Länge des Durchmessers. Seine Hälfte, das ist die Länge bf ist also $7\frac{1}{2}$. Multipliciert man das mit dem halben Bogen, so erhält man den Inhalt des Ausschnittes, der zwischen den Geraden cf und af sowie dem Bogen $\overset{\frown}{abc}$ enthalten ist, und wenn man hierzu den Inhalt des Dreiecks acf addiert, und derselbe entsteht durch Multiplikation der Geraden df mit der Hälfte der Geraden ac, so ist die Summe gleich dem Flächeninhalte des Kreisabschnittes (Fig. 36).

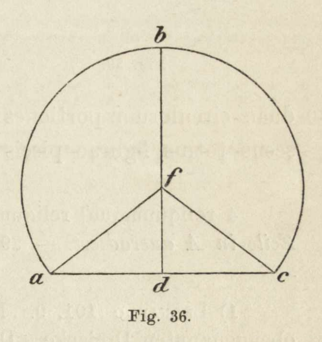


Fig. 36.

Quicumque igitur portionis circuli semicirculo maioris existentis embadum scire voluerit, dimidium diametri illius circuli, cuius portio fuerit, in dimidium arcus portionis multiplicet, et quod fuerit, servet. Post haec dimidium diametri ex totius sagittae summa demat reliquumque in cordae dimidium multiplicet, et quod fuerit, servatae quantitati superaddat, indeque collectum eiusdem portionis semicirculi maioris adparentis embadum fore confirmet.

Cuius demonstratio supradictas demonstrationes non ignoranti manifesti patebit.[1])

14. Ad horum itaque similitudinem omnes circulares figuras, illa etiam insuper, quae partim ex arcubus, partim ex rectis lineis formantur, metiri poteris. Ut in triangulo, cuius basis est arcus $\widehat{bdc}$ (Fig. 37), eiusque duo latera sunt lineae ab, ac rectae, si rectam lineam bc protraxeris, triangulus rectilineus abc nec non et figura $\widehat{bdc}$ ex recta et circulari linea constans circulique portio nuncupata formabitur. Cumque utriusque istarum figurarum aream singulariter noveris, si eas in unum colligeris, totius figurae aream continebunt, et haec est figura.[2])

15. Simili quoque ratione si figura $\widehat{aecbd}$ procreatur (Fig. 38), cuius basis bc recta linea fuerit, eiusdemque duo latera $\widehat{adb}$, $\widehat{aec}$ lineae circulares exstiterint, et in ea duas rectas ab, ac lineas protraxeris, in tres partes tota figura dividetur. Quarum una fuerit trigonus rectilineus abc, reliquae vero duae circuli portiones apparebunt, quarum ⟨alteram tres a, d, b⟩, alteram autem tres a, e, c litterae designabunt. Istorum quidem trium partium embada via praedicta reperies.

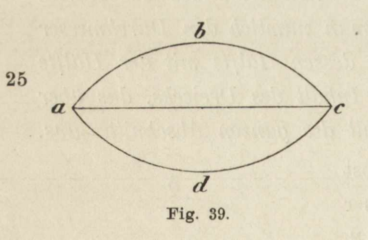


Fig. 39.

16. Quod si forte aliqua figura ex duabus circuli portionibus constare contingit, ut in hac figura $\widehat{abcd}$, quam *piscis formam* habere dicunt, et rectam in eo lineam ab produxeris (Fig. 39), duae circulorum portiones separabuntur, quarum embada singulariter addiscens totius figurae piscis formam habentis embadum non ignorabis.[3])

---

4 reliquumque] reliquum quidem quod. — 22 alteram tres a, d, b *über der Zeile in A ausradiert.* — 29 et *fehlt in B.* — 31 embada.

---

1) Leonardo 101, 9. Die *portio maior* ist also Kreisausschnitt *plus* dem obengenannten Dreiecke. Da sonst im Mittelalter die *portio maior* durch Subtraktion der *portio minor* vom ganzen Kreise gewonnen wird, so ist die Übereinstimmung Leonardo's mit Savasorda um so beachtenswerther.

2) Leonardo 101, 13. 3) Leonardo 101, 18.

Wer also den Inhalt eines Kreisabschnittes, der grösser ist als der Halbkreis, finden will, muss den Halbmesser des Kreises, zu dem der Abschnitt gehört, mit dem halben Bogen des Abschnittes multiplicieren und das Produkt sich merken. Dann muss er den Halbmesser von der ganzen Länge des Pfeiles wegnehmen und den Rest mit der halben Sehne vervielfachen, das Produkt aber zu dem vorher gemerkten Produkte addieren, dann kann er behaupten, dass die Summe gleich dem Inhalte des Kreisabschnittes grösser als der Halbkreis ist.

Der Beweis hierfür wird jedem, der den vorhergehenden Beweis verstanden hat, klar sein.[1])

14. In dieser Weise kann man alle Kreisfiguren, sowie ausserdem auch diejenigen, welche zum Theil aus Kreisbogen, zum Theil aus geraden Linien gebildet werden, ausmessen. Wenn man z. B. in dem Dreiecke, dessen Grundlinie der Bogen $\widehat{bdc}$ (Fig. 37), seine beiden Seiten aber die Geraden ab, ac sind, die gerade Linie bc zieht, so wird dadurch das geradlinige Dreieck abc und die von einer Geraden und einem Kreisbogen begrenzte Figur $\widehat{bdc}$, die Kreisabschnitt genannt wird, gebildet. Da man nun für jede einzelne dieser Figuren den Inhalt kennt, so werden sie durch Addition den Inhalt der ganzen Figur ergeben, und das ist die zugehörige Figur.

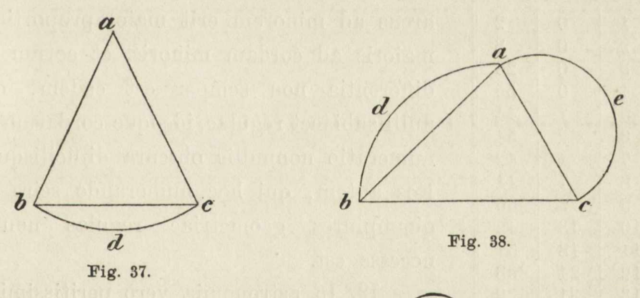


Fig. 37.

Fig. 38.

15. Wird in ähnlicher Weise eine Figur $\widehat{aecbd}$ gebildet (Fig. 38), deren Grundlinie bc eine gerade Linie, die beiden Seiten $\widehat{adb}$, $\widehat{aec}$ aber Kreisbogen darstellen, und man zieht in derselben die beiden Geraden ab, ac, so zerfällt die ganze Figur in drei Theile. Einer davon ist das geradlinige Dreieck abc, die andern beiden aber erscheinen als Kreisabschnitte, von welchen den einen die drei Buchstaben a, d, b, den andern aber die Buchstaben a, e, c bezeichnen. Die Inhalte dieser drei Theile findet man auf dem vorgenannten Wege.

16. Besteht zufällig eine gegebene Figur aus zwei Kreisabschnitten, wie die Figur $\widehat{abcd}$, von welcher man sagt, sie habe die *Form eines Fisches,* und man zieht in derselben die Gerade ab, so werden dadurch zwei Kreisabschnitte getrennt, deren Inhalt man einzeln berechnen und so auch den Inhalt der ganzen fischähnlichen Figur kennen wird.[3])

17. *Item in figura, quae non sit circularis, sed obliqua procreatur, cuius duo diametra sunt inaequalia, utriusque diametri dimidium accipiens in unum collige, collectumque | in semet ipsum multiplica. Ex qua multiplicatione septimam septimaeque dimidium, sicut in circulo feceras, abiiciens reliquum huius obliquae figurae aream fore non ambigas* (Fig. 40).[1])

Istarum quippe figurarum variabilium multas invenies, ad quorum cognitionem, ne prolixitas operis taedium generet, ista sufficiant.

18. Cum circuli cuiuslibet diametrum sciveris, et quaelibet, in ipso scilicet circulo, tibi data corda fuerit, si eiusdem cordae arcum nosse volueris, et, quemadmodum certam regulam in cognitione longitudinis cuiuslibet diametri per suam circumferentiam, vel cuiuslibet circumferentiae per sui diametri notitiam inveneris, ita certam regulam, qua per cordam vel sagittam longitudinem sui arcus addiscas, invenire desideras, hanc regulam te nullatenus invenire posse cognoscas, eo quod portio cordae ad suum arcum non semper eodem intervallo procedit, sed secundum arcuum cordarumque variationes alteratur. Veluti si in eodem circulo duo inaequales procreantur arcus, proportio maioris arcus ad minorem erit maior proportione cordae maioris ad cordam minoris, et eorum huiusmodi differentia non semper est eadem, quapropter nulli subiacet regulae, ideoque cordarum et arcuum numeratio nonnullis obscura difficilisque videtur. Eos autem, qui hoc numerando scire voluerunt, quamplures geometriae regulas non ignorare necesse est.

Tabula arcum et cordarum.

Partes Cordarum	Arcus		
	Partes	Min.	Sec.
1	1	0	2
2	2	0	8
3	3	0	26
4	4	0	55
5	5	1	44
6	6	2	54
7	7	4	42
8	8	7	11
9	9	9	56
10	10	13	42
11	11	18	54
12	12	24	38
13	13	31	9
14	14	40	0
15	15	50	10
16	17	2	16
17	18	16	36
18	19	33	27
19	20	53	26
20	22	17	10
21	23	45	6
22	25	19	24
23	27	0	0
24	28	49	56
25	31	26	37
26	33	20	52
27	36	27	32
28	44	0	0

19. In astronomia vero peritissimi istud addiscere summopere curaverant, eo quod astronomicae doctrinae valde necessarium est. Quapropter quaedam inde scripta, ne oblivione traderetur, composuerunt, ex quibus illud hoc in opusculo transtulimus, quod nobis operique nostro necessarium fore cognovimus. Quasdam insuper tabulas, in quibus 28 lineationes protrahuntur, ordinavimus. Diametrum enim circuli similiter in 28 partes divisimus, quare secundum istas divisiones linea circumferens 88 partes | neces-

15 intervallo] calle. — 16 set *A und so später immer.* — 19 portione. — 22 nullius *A*. — 24 Eos qui autem. — *In der* Tabula arcuum et cordarum *lies A in der dritten Tafelzeile* 25 *statt* 26 *und in der sechszehnten* 15 *statt* 16 *in den Sekunden.*

17. *In einer Figur ferner, die kein Kreis ist, sondern eine ovale Gestalt hat, und deren beide Durchmesser ungleich sind, addiere man die Hälften der beiden Durchmesser und multipliciere die Summe mit sich selbst. Nimmt man dann von dem Produkte $\frac{3}{14}$ hinweg, wie beim Kreise geschah, so wird der Rest den Inhalt der ovalen Figur darstellen* (Fig. 40).[1])

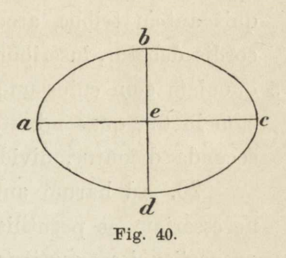


Fig. 40.

Solcher veränderlicher Figuren kann man viele finden, doch mögen, damit nicht die Verwickeltheit des Werkes Abscheu errege, zu ihrer Kenntnis die gegebenen Beispiele genügen.

18. Kennt man den Durchmesser eines Kreises, und ist eine Sehne desselben Kreises gegeben, man will den zu der Sehne gehörigen Bogen bestimmen und man wünscht in ähnlicher Weise, wie man den Durchmesser aus dem zugehörigen Umfange oder den Umfang aus seinem Durchmesser durch eine sichere Formel finden kann, ebenso eine sichere Regel zu finden, durch welche man aus der Sehne oder dem Pfeile die Länge des zugehörigen Bogens bestimmen kann, so muss man wissen, dass eine solche Regel überhaupt nicht gefunden werden kann, weil nämlich das Verhältnis der Sehne zu ihrem Bogen nicht immer in gleichem Maasse wächst, sondern nach der Veränderung von Sehne und Bogen verschieden ist. So ist, wenn in demselben Kreise zwei ungleiche Sehnen gezogen werden, das Verhältnis des grössern Bogens zum kleinern grösser als das Verhältnis der Sehne des grössern zur Sehne des kleinern, und der Unterschied der Verhältnisse ist nicht immer derselbe, und deshalb unterliegt er eben keiner Regel, und hierdurch erscheint die Berechnung der Sehnen und Bogen manchem dunkel und schwierig. Diejenigen aber, welche diese Berechnung anstellen wollen, müssen eine sehr grosse Zahl geometrischer Sätze kennen.

Die in der Astronomie Erfahrensten sind das zu lernen am meisten beflissen, da es für die Lehren der Astronomie unumgänglich nöthig ist. Einige von ihnen haben daher Schriften darüber verfasst, damit es nicht in Vergessenheit gerathe, und wir haben aus denselben dasjenige in unser Werk aufgenommen, was wir für unser Werk als nothwendig erkannten. Wir haben ferner eine Tafel hinzugefügt, in welcher 28 Zeilen gezogen sind. Auch den Durchmesser des Kreises haben wir in ähnlicher Weise in 28 Theile getheilt, so dass von diesen Theilen der Umfang nothwendiger-

1) Leonardo 101, 23. Es handelt sich hier offenbar um eine Ellipse mit den Achsen a und b. Savasorda so gut wie Leonardo geben für den Inhalt die Formel $J = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \pi$.

sario continebit. Istarum etiam tabularum latitudo in quatuor lineationes dividitur, quarum prima 28 diametri partes in longitudine continet, in reliquis autem tribus, arcuum quantitates ab uno usque ad 28, prout singulis cordis debetur, inscribuntur. Aream vero tabularum idcirco in tria divisimus, quoniam cum cuiuscunque arcus quantitatem subtiliter investigare voluimus, cum in 60, quae minuta vocantur, quorum iterum unumquodque in 60, quae secunda dicuntur, dividimus, ut in his subscriptis tabulis ostenditur.[1])

20. Ad harum autem tabularum notitiam quandam regulam tibi valde necessariam et perutilissimam indicabimus. Ea est huiusmodi. *Si quatuor proportionales quantitates exstiterint, multiplicatio primae ⟨in quartam⟩ ea erit, quae et secundae in tertiam.* Hac itaque regula tibi bene cognita et tenaci memoriae commendata, istarum tabularum numerationes breviter ostendamus.

21. *Si cuiuslibet igitur arcus corda tibi data fuerit, et eius arcum scire volueris,* ipsius circuli diametrum per cordae sagittaeque longitudinem, ut supra docuimus, prius addiscas. Quod diametrum si 28 partium exstiterit, quemadmodum circuli diametrum in his tabulis positum fore praediximus, laboris expers cum data corda in lineam partium cordarum ingrediens, quod in eius directo in lineis arcuum ex partibus et minutis ac secundis invenies, erit quaesiti arcus quantitas. Si autem illius dati circuli diametrum plus minusve 28 partibus continuerit, quam proportionem ad 28 partes habuerit, inquire, quoniam eadem erit datae cordae ad cordam tabularum proportio. Nam manifestum est, quod proportio diametri dati circuli ad datam cordam est eadem, quae et diametri tabularum, quod 28 partes in se recipit, ad illam cordam, quae secundum illius diametri quantitatem his in tabulis esset accipienda. Quare si datam cordam, quae in proportione prima consequens est, assumpseris, et eam in tabularum diametrum, quod in secunda proportione est antecedens et 28 partes suscipit, multiplicaveris, indeque proveniens per dati circuli diametrum, quod in prima proportione est antecedens, diviseris, corda, quae his tibi debetur in tabulis, exibit. In cuius directo ipsius quaesitum arcum reperies. Proportio autem istius inventae cordae ad suum arcum ea est, quae et datae cordae ad suum arcum, quem quaeris. Quapropter, si arcum in his tabulis repertum, qui est in prima proportione consequens, in datam cordam multiplicaveris, et per tabularum cordam diviseris, quaesitum arcum incontanter invenies.

---

9 perutissimam *A.* — Ea] Hea *A.* — 10 in quartam *in A über der Zeile ausradiert.* — 21 tabulatam *A.* — 22 portio. — 25 portione. — 30 portio. — 31 ea] eo. — arcus. — 33 portione.

---

1) Die Sehnentafel Savasorda's dürfte wohl die älteste sein, welche in einem lateinisch geschriebenen Werke nachweisbar ist.

weise 88 Theile enthält. Die Breite der Tafel ist in vier Kolumnen getheilt. In der ersten sind die 28 Theile des Durchmessers enthalten, in den drei übrigen ist der Betrag der Kreisbogen, wie er zu den einzelnen Sehnen von 1 bis 28 gehört, eingeschrieben. Die Fläche der Tafel ist aber deshalb in drei Kolumnen getheilt, weil wir den Betrag der einzelnen Bogen genau finden wollten, und deshalb jeden einzelnen Theil desselben in 60 Theile, die wir Minuten nennen, und von diesen wieder jeden einzelnen in 60 Theile, die Sekunden heissen, zerschneiden, wie in der beigegebenen Tafel zu sehen ist.[1])

20. Für den Gebrauch der Tafel wollen wir eine sehr nöthige und höchst nützliche Regel hier anführen. Es ist folgende: *Wenn vier Grössen in Proportion stehen, so ist das Produkt der ersten und vierten gleich dem der zweiten und dritten.* Nachdem diese Regel bekannt und in treuem Gedächtnis festgehalten ist, wollen wir den Gebrauch jener Tafel in Kürze darlegen.

21. *Ist also die Sehne irgend eines Bogens gegeben, und man will den Bogen bestimmen,* so suche man nach dem oben Gelehrten zunächst den Durchmesser des Kreises durch die Länge der Sehne und des Pfeiles. Hat dann der Durchmesser 28 Theile, wie wir sagten, dass der Durchmesser des Tafelkreises gesetzt sei, so geht man ohne jede Rechnung mit der gegebenen Sehne in die Kolumne der Theile der Sehne ein, und der Betrag, welchen man in derselben Zeile in den Kolumnen der Bogen an Theilen, Minuten und Sekunden findet, ist die gesuchte Länge des Bogens. Enthält aber der Durchmesser des gegebenen Kreises mehr oder weniger als 28 Theile, so sehe man zu, wie gross sein Verhältnis zu 28 Theilen ist, da das Verhältnis der gegebenen Sehne zur Tafelsehne dasselbe ist. Es ist nämlich klar, dass das Verhältnis des Durchmessers der gegebenen Kreises zu der gegebenen Sehne dasselbe ist als das des Tafeldurchmessers, der 28 Theile enthält, zu derjenigen Sehne, welche der Länge dieses Durchmessers entsprechend in der Tafel zu nehmen wäre. Multipliciert man daher die gegebene Sehne, welche in dem ersten Verhältnis das Hinterglied ist, mit dem Tafeldurchmesser, dem Vordergliede des zweiten Verhältnisses, und theilt das Produkt durch den Durchmesser des gegebenen Kreises, der im ersten Verhältnis das Vorderglied bildet, so kommt die Sehne, die in der Tafel entspricht, und in derselben Zeile findet man den zugehörigen Bogen. Das Verhältnis dieser gefundenen Sehne zu ihrem Bogen ist dasselbe wie das der gegebenen Sehne zu ihrem Bogen, den man sucht. Multipliciert man daher den in der Tafel gefundenen Bogen, der im ersten Verhältnis das Hinterglied bildet, mit der gegebenen Sehne, und dividiert dann mit der Tafelsehne, so findet man unverzüglich den gesuchten Bogen.

Ad cuius similitudinem circulus, cuius diametrum 10 et semissem contineat, proponatur, | in quem quaedam corda, cuius longitudo 6 mensuras recipiat, protrahatur. Huius autem cordae ⟨arcum⟩ si scire desideras, datam cordam, et sunt 6, in 28, quae sunt tabularum diametrum, multiplicans, 168 nimirum reperies. Cuius numeri summam si in 10 et semissem, quod est dati circuli diametrum, diviseris, 16 partes exibunt, et haec est corda, cuius proportio ad tabularum diametrum ea est, quae et datae cordae ad sui circuli diametrum. In istius autem cordae directo 17 partes et 2 minuta 16que secunda invenies, quae sunt eiusdem cordae arcus in tabulis. Quem si in 6, quae sunt datae cordae quantitas, duxeris, 102 partes et 13 minuta ac 36 secunda procreabuntur. Quam summam si ⟨per⟩ 16, quae sunt tabularum corda, diviseris, 6 partes et 13 minuta ac 21 secunda reperies, quod est quaesiti arcus summa.

Hac itaque via in omnibus datis cordis, si sui circuli diametrum non ignoraveris, et, quemadmodum ostendimus, processeris, ad illius datae cordae arcum pervenies.

22. *Item si cuiuslibet circuli arcus, cuius diametrum sciveris, datus fuerit, et eius cordam nosse volueris,* si illius circuli diametrum 28 partes habuerit, nullo labore metitur. Datum arcum in lineis partium arcuum inquirens, quod in directo ipsius ex cordarum partibus inveneris, accipe, quia ipsum erit eius cordae longitudo.

Quod si circuli diametrum plus minusve 28 partibus ad sui constitutionem susceperit, datum arcum in 28, quod est tabularum diametrum, multiplica, indeque collectum per diametrum circuli, cuius ipse arcus exstiterit, partire, et exibit arcus, cuius proportio ad tabularum cordam ea est, quae etiam arcus ad suam cordam. Eius itaque cordam in ipsius directo positam ⟨ex⟩ tabulis abstrahens eam in datum arcum multiplica, et quod fuerit, per arcum tabularum partire, quodque exierit, erit corda quaesita. In hoc autem nulla, ni fallor, eget similitudine, eo quod si praedictae similitudinis conversam non ignoraveris, tu ipse absque omni doctrina manifeste illud agnoscas.

23. *Item si cuiuslibet circuli, cum circumferentem lineam sciveris, corda quaelibet data fuerit, et eius arcum nosse volueris,* si circuli diametrum per circumferentem lineam, ut supra docuimus in areae circuli cognitione, didiceris, idem, quod et supra monstravimus, invenies. Habebis etenim cordam circuli, cuius diametrum non ignorabis. Hunc autem operandi modum superius diligenter | ostendimus.

---

3 arcum *in A über der Zeile ausradiert.* — 9 secundas. — 11 per *fehlt.* — 18 corda. — 25 portio. — 27 ex *fehlt in A.* — 29 similitune *A.* — 35 idem] id est. — 35—36 corda.

Als Beispiel nehmen wir einen Kreis an, dessen Durchmesser gleich $10\frac{1}{2}$ sei, und in demselben werde eine Sehne gezogen, deren Länge 6 Maasseinheiten enthält. Zur Bestimmung des Bogens dieser Sehne multipliciert man die gegebene Sehne, das ist 6, mit 28, dem Tafeldurchmesser, und erhält so 168. Wenn diese Zahl durch $10\frac{1}{2}$, den gegebenen Durchmesser, dividiert wird, so kommen 16 Theile, und das ist die Sehne, deren Verhältnis zum Tafeldurchmesser dasselbe ist, wie das der gegebenen Sehne zu ihrem Durchmesser. In der Zeile dieser Sehne findet man nun 17 Theile 2 Minuten 16 Sekunden, und das ist die Länge des Bogens, der zu der Tafelsehne gehört. Multipliciert man diesen Bogen mit 6, nämlich der Länge der gegebenen Sehne, so erhält man 102 Theile 13 Minuten und 36 Sekunden, welche durch 16, das ist die Tafelsehne, dividiert, 6 Theile 13 Minuten und 21 Sekunden ergeben, und das ist die Grösse des gesuchten Bogens.

Auf diesem Wege also kommt man für alle gegebenen Sehnen zur Kenntnis des zu der gegebenen Sehne gehörigen Bogens, sobald man nur den Kreisdurchmesser kennt, und so vorgeht, wie wir gelehrt haben.

22. *Ist ebenso der Bogen eines beliebigen Kreises, dessen Durchmesser man kennt, gegeben, und man wünscht die Sehne desselben zu finden,* so wird dieselbe, falls der Durchmesser des Kreises 28 Theile besitzt, ohne Mühe gemessen. Man sucht den gegebenen Bogen in den Kolumnen der Theile des Bogens auf, und nimmt das, was man in derselben Zeile als Theile der Sehne findet, denn das ist dann die Länge der Sehne.

Ist jedoch der gegebene Kreisdurchmesser mehr oder weniger als 28 Theile lang, so multipliciere man den gegebenen Bogen mit dem Tafeldurchmesser 28, und theile das Produkt durch den Durchmesser des Kreises, dessen Bogen gegeben ist, so ergiebt sich der Bogen, dessen Verhältnis zur Tafelsehne dasselbe ist, als das des gegebenen Bogens zu seiner Sehne. Man entnimmt also die in derselben Zeile stehende Sehne aus der Tafel und multipliciert sie mit dem gegebenen Bogen, theilt das Produkt durch den Bogen der Tafel, so ist das Ergebnis die gesuchte Sehne. Hierbei bedarf es, wenn ich nicht irre, keines Beispieles, weil, wenn man die Umkehrung des vorhergehenden Beispieles sich vergegenwärtigt, man ohne jede Belehrung die Sache klar erkennen wird.

23. *Ist ferner eine Sehne eines beliebigen Kreises, dessen Umfang man kennt, gegeben, und man will den zugehörigen Bogen ermitteln,* so wird man, sobald man den Kreisdurchmesser aus dem Umfange so berechnet hat, wie wir oben bei der Lehre vom Kreisinhalte gelehrt haben, in derselben Weise, wie wir soeben gezeigt haben, das Gewünschte finden. Man kennt ja die Sehne des Kreises, dessen Durchmesser bekannt ist. Die Methode der Auffindung haben wir oben deutlich dargelegt.

Verum si hoc idem aliter scire desideras, datam cordam in circumferentem lineam circuli tabularum, quam 88 partium constare diximus, multiplica, indeque coadunatum per summam circumferentiae circuli, corda cuius arcus data fuerit, partire, quodque exierit, erit corda circuli tabula-
5 rum similis cordae datae. Eius igitur arcum per has tabulas inquirens eum in datae cordae summam multiplica, et inde collectum per cordam, quam ex tabula inveneras, quemadmodum in praecedenti numeratione feceras, partire, et quaesitum arcum veraciter invenies.

Huius autem numerationis similitudo est, ut in circulo, cuius circum-
10 ferens linea 33 partes continet, si corda, cuius longitudo 6 partium exstiterit, protrahatur, et, quota sit eius arcus longitudo, non ignorare volueris, datam cordam, quae est 6, in circumferentem lineam circuli tabularum, quae est 88 partium, multiplica, et 528 procreabuntur. Cuius numeri summam per 33, quae sunt summa circumferentis lineae circuli, cuius haec
15 corda, partire, et 16 partes invenies, quae sunt corda circuli tabularum datae cordae similis. Istius itaque cordae arcum per tabulas, ut supra monstravimus, addiscito, et eum in summam datae cordae multiplica, indeque repertum per tabularum cordam, ut superius feceras, partire, et quaesitum arcum ut supra reperies.

20 **24.** *Si quilibet arcus cuiuslibet circuli, cuius circumferentiam noveris, datus fuerit, et eius cordam per tabulas nosse volueris,* datum arcum in 88, quae sunt summa circumferentiae circuli tabularum, multiplica, et quod inveneris, per circumferentem lineam circuli, cuius datus arcus fuerit, partire, quodque exierit, erit arcus circuli tabularum arcu dato similis. Eius
25 itaque cordam in tabulis, ut diximus, addiscens eam in arcus dati ⟨summam⟩ multiplica, indeque coadunatum per summam arcus tabularum supra reperti partire, et quod fuerit, erit corda quaesita.

Ad cuius similitudinem sit arcus 5 ulnas et semissem in sui obliquitate continens ex circulo, cuius circumferens linea 33 ulnas recipiat. Huius
30 autem arcus longitudinem nosse volens eum in 88, quae sunt circumferentia circuli tabularum, multiplica, et 484 invenies, quibus per 33, quae sunt circumferens linea circuli, cuius arcus datus exstiterit, divisis 14 partes et 40 minuta, id est duas tertias, reperies, et hic est arcus circuli tabularum dato arcu similis, cuius cordam in tabulis 14 partes continere non dubites.
35 Quam si in 5 et semissem, quae est | dati ⟨arcus⟩ quantitas, duxeris, 23
77 partes colligentur. Cuius numeri summam si in 14 et duas tertias di-

---

19 ut] valde. — 25—26 summam *in A über der Zeile ausradiert.* — 33 id est] idem. — 35 arcus *fehlt.*

Wünscht man aber auf andere Weise vorzugehen, so multipliciere man die gegebene Sehne mit dem Umfange des Tafelkreises, den wir zu 88 Theilen angeben, und dividiere das Produkt durch die Länge des Umfangs des gegebenen Kreises, dessen Bogen gegeben ist, dann ist das Ergebnis die Sehne des Tafelkreises, welche der gegebenen Sehne entspricht. Sucht man nun dazu den Bogen durch unsere Tafel, multipliciert ihn mit der gegebenen Sehne und theilt das Produkt durch die in der Tafel gefundene Sehne, wie man es in der vorhergehenden Berechnung that, so findet man den gesuchten Bogen nach wahrer Länge.

Ein Beispiel für diese Rechnung ist folgendes. In einem Kreise, dessen Umfang 33 Theile enthält, sei eine Sehne, deren Länge aus 6 Theilen besteht, gezogen. Will man nun wissen, wie lang der Bogen derselben ist, so multipliciere man die gegebene Sehne von 6 Theilen mit dem Umfange des Tafelkreises, der 88 Theile enthält, dann entstehen 528. Dieses Produkt dividiere man durch 33, das ist die Länge des Umfangs desjenigen Kreises, dessen Sehne gegeben ist, so findet man 16 Theile, und das ist die Sehne des Tafelkreises, die der gegebenen Sehne entspricht. Zu dieser Sehne sucht man den Bogen in der Tafel, wie wir oben gezeigt haben, und multipliciert ihn mit der Länge der gegebenen Sehne, das Produkt aber dividiert man durch die Tafelsehne, wie oben geschah, und findet dadurch den gesuchten Bogen wie oben.

24. *Ist aber ein Bogen eines beliebigen Kreises, dessen Umfang man kennt, gegeben, dessen Sehne man vermittelst der Tafel finden will,* so multipliciere man den gegebenen Bogen mit 88, das ist mit dem Umfange des Tafelkreises, und dividiere das Ergebnis durch den Umfang des Kreises, dessen Bogen gegeben ist, der Quotient ist dann der Bogen des Tafelkreises, der dem gegebenen Bogen ähnlich ist. Die zugehörige Tafelsehne sucht man, wie wir oben gezeigt haben, multipliciert sie mit der Länge des gegebenen Bogens, und dividiert das Ergebnis durch die Länge des Tafelbogens, den wir oben gefunden haben, der Quotient ist dann die gesuchte Sehne.

Als ein Beispiel sei ein Bogen gegeben, der $5\frac{1}{2}$ Ellen in seiner Rundung enthält, von einem Kreise, dessen Umfang 33 Ellen fasst. Will man nun die Länge des Bogens der Tafel ermitteln, so multipliciere man ihn mit 88, das ist mit dem Umfange des Tafelkreises, dann findet man 484, die durch 33, den Umfang des Kreises, dessen Bogen gegeben ist, dividiert 14 Theile und 40 Minuten, das sind $\frac{2}{3}$, ergeben, und das ist der Bogen des Tafelkreises, der dem gegebenen Bogen ähnlich ist. Seine Sehne ist in der Tafel ohne Zweifel gleich 14 Theilen. Multipliciert man sie mit $5\frac{1}{2}$, der Länge des gegebenen Bogens, so erhält man 77 Theile, und dividiert

viseris, quae sunt quantitas arcus tabularum, 5 et quarta provenient, quod est arcus dati corda, quam quaeris.

25. Item si arcus, cuius quantitas 27 et semissem continuerit, ex circulo, cuius circumferentiam 33 partes metiuntur, proponatur, et eius cordae 5 longitudinem scire desideras, eam 5 et quartam, sicut et supra, continere reperies, propterea quod omnis arcus, qui semicirculo maior exstiterit, si ex tota sui circuli circumferentia demptus fuerit, arcum semicirculo minorem relinquit. Horum quidem duorum arcuum corda erit eadem, eo quod omnis recta linea, quae in circulo protrahitur praeter diametrum, si ex utraque 10 sui parte in ipsius circumferentia terminatur eum per inaequales dividit partes. Diametra enim eum semper per aequalia partiuntur, aliae vero lineae circulum per inaequales partes dividunt. Harum altera pars maior, altera vero semicirculo minor existit, et linea dividens corda utriusque arcus iudicatur. Arcus autem in tabulis cordarum descriptus est duorum arcuum 15 eandem cordam habentium minimus. Maiorem quidem arcum ibi describere non necessarium duximus, eo quod per minorem arcum in tabulis descriptum leviter inveniri poterit. Minore enim arcu ex tota circumferentia dempto maior arcus, qui ei ad eandem cordam habendam copulatur, relinquitur. Verum si arcum semicirculo maiorem habueris et eius cordam 20 nosse volueris, eum totum ex sui circuli circumferentia demens arcus semicirculo minor remanebit, cuius cordam inveniens eam eiusdem maioris arcus quaesitam cordam fore non ambigas.

26. Hoc etiam similiter ab animo non labatur, quod *in omnibus circulorum cordis duae sagittae in earum dimidio secundum rectum angulum ele-* 25 *vatae et per centrum productae reperiuntur.* Hae autem in nulla linearum, quae circuli corda vocetur, sibimet invicem sunt aequales, sed altera longior, altera brevior iudicabitur. Longior quidem in directo longioris, brevior autem in directo brevioris arcus protrahitur. Harum quippe sagittarum longitudines in arearum portionum circuli cognitione, cum embadis por- 30 tionum embada triangulorum eisdem portionibus contigua superaddere vel minuere volueris, sunt perutillimae, quemadmodum in hac eadem particula superius indicavimus.

Cum igitur cordam et circuli diametrum sciveris, si sagittae longitudinem | *nosse desideras,* diametri dimidium in semet multiplica, et ex collecto 23′ 35 medietatis cordae multiplicationem deme, residuique radicem inquire, quam si diametri dimidio superadderis, longiorem sagittam invenies, si vero ex

---

1 quartam *B*. — 4 circumferentia. — 6 minor *A*. — 7 fueris. — 11 inaequalia *A*. — 12 Harum] Nam *B*. — 15 Maiorem] Maior est. — 26 sunt sunt *A*. — 29—30 portionum portionum *A*. — 30 eisdem] eiusdemque *B*.

man diese Zahl durch $14\frac{2}{3}$, das ist die Länge des Tafelbogens, so kommen $5\frac{1}{4}$, und das ist die Sehne des gegebenen Bogens, den man sucht.

25. Wird ferner ein Bogen von der Länge $27\frac{1}{2}$ vorgelegt von einem Kreise, dessen Umfang 33 Theile misst, und man sucht die zugehörige Sehne, so findet man, dass sie $5\frac{1}{4}$ Theile wie oben enthält, weil jeder Bogen, der grösser ist als ein Halbkreis, von dem ganzen Kreisumfange abgezogen einen Bogen kleiner als der Halbkreis übrig lässt. Diese beiden Bogen besitzen dieselbe Sehne, weil jede gerade Linie, die, ohne Durchmesser zu sein, im Kreise gezogen wird und nach beiden Seiten in dem Umkreise endigt, ihn in zwei ungleiche Stücke theilt. Der Durchmesser halbiert ihn nämlich immer, jede andere Gerade aber zerschneidet den Kreis in zwei ungleiche Theile. Von diesen Theilen ist der eine grösser, der andere kleiner als der Halbkreis, und die Theilungslinie wird als Sehne von beiden Bogen angesehen. Der Bogen aber, der in der Sehnentafel verzeichnet ist, ist von den beiden Bogen, welche dieselbe Sehne besitzen, der kleinste. Den grössern Bogen dort auch zu verzeichnen hielten wir für nicht nöthig, weil er durch den in der Tafel aufgeführten kleinern Bogen leicht gefunden werden kann. Nimmt man nämlich den kleinern Bogen von dem ganzen Umfange weg, so bleibt der grössere Bogen übrig, der jenem als zu derselben Sehne gehörig verbunden ist. Hat man aber einen Bogen grösser als der Halbkreis und will seine Sehne finden, so zieht man ihn von dem Umfange des zugehörigen Kreises ab, und es bleibt der Bogen übrig, der kleiner als der Halbkreis ist, dessen Sehne sucht man auf, und sie ist dann sicher auch die gesuchte Sehne desselben grösseren Bogens.

26. Das lasse man auch niemals ausser Acht, *dass für jede Sehne im Kreise zwei Pfeile in ihrem Halbierungspunkte unter rechten Winkeln errichtet und durch den Mittelpunkt gezogen gefunden werden können.* Sie sind aber für keine Gerade, die Kreissehne genannt werden kann, einander gleich, sondern der eine ist länger, der andere aber kürzer; der längere wird nach dem grössern Bogen, der kleinere aber nach dem kleinern hin gezogen. Die Länge der Pfeile ist für die Auffindung des Inhaltes der Kreisabschnitte, wenn man dem Inhalte der Kreisausschnitte den Inhalt der Dreiecke, welche diesen Ausschnitten anliegen, hinzufügen oder von ihnen wegnehmen muss, von höchstem Nutzen, wie wir oben in diesem Theile schon auseinander setzten.

Kennt man nun die Sehne und den Kreisdurchmesser, und will die Länge des Pfeiles finden, so multipliciere man den Halbmesser mit sich selbst und subtrahiere von dem Produkte das Quadrat der halben Sehne, von dem Reste suche man die Wurzel. Addiert man diese dann zu dem

eodem depresseris, breviorem sagittam nimirum reperies.[1]) Quapropter si duarum sagittarum alteram sciveris et eam ex diametro depresseris, alteram sagittam incontanter habebis. Atque *si utramque sagittam sciveris et earum cordam nosse volueris,* sagittarum alteram in alteram multiplica, indeque
5 collecti radicem accipiens, eam quaesitae cordae dimidium fore non dubites. Qua duplicata cordam integram reperies.[2])

Si autem cordam et sagittarum alteram sciveris, diametrum vero non ignorare volueris, cordae dimidium in se ipsum multiplica, et collectum inde per notam sagittam partire, quodque exierit, erit alterius sagittae longitudo.
10 Istarum nempe sagittarum longitudines in unum coadunatae totius diametri longitudinem efficiunt.[3])

Huius itaque partis dimensionibus perfecte monstratis ad dimensionem multilaterarum figurarum explanationem transitum faciamus.

Quinta pars in multilaterarum figurarum dimensionibus.

15 1. Ut superius in his, quae praemissa sunt, ostendimus, harum figurarum diversa sunt genera. Quaedam enim sunt *pentagonae,* quaedam *exagonae,* quaedam autem *eptagonae* et aliarum etiam conplurium generum. Hae autem figurae nunc aequilaterae et aequiangulae, nunc diversorum laterum et diversorum angulorum inveniuntur. Quapropter earum dimen-
20 siones monstrare volentes ad earum figurarum evidentiam, quae sunt aequilaterae et aequiangulae, quaedam regula praemittatur. Ea est huius modi.

Si circulus intra figuram rectilineam eius omnia latera contingens describatur, multiplicatio medietatis diametri illius in omnium laterum eiusdem figurae dimidium ipsius figurae aream reddit.[4])

25 In omni vero tali figura tetragona et deinceps omnia eius latera contingens circulus scribi potest. In illis autem, quarum latera et anguli diversificantur, circulus nequaquam circumscribi potest. Quod si in aliqua figurarum, ut in triangula, vel tetragona, seu pentagona, sive aliarum qualibet circulus eius omnia latera contingens circumscribatur, multiplicationem
30 medietatis diametri in illius omnium laterum figurae dimidium eiusdem embadum procreare non dubites.

---

2 ex diametro eam *B.* — 5 quaesitam cordam. — 14 *In A ausradiert.* — 24 *Hinter* dimidium *setzt A nochmals:* ipsius figurae dimidium. — 25 tali *fehlt in B.* — 25—31 *Neben diesen Zeilen steht in B die Randglosse:* Hic vel omnino tota littera corrupta est, vel autor falsitates maximas ait. *B hat also übersehen, dass der Verfasser nur von regulären Figuren handeln will.*

---

1) D. h. $\text{sag}\,\alpha = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{cord}\,\alpha}{2}\right)^2}.$

Halbmesser, so erhält man den längern Pfeil, subtrahiert man sie aber davon, so findet man den kürzern Pfeil.[1]) Kennt man also den einen der beiden Pfeile und subtrahiert ihn von dem Durchmesser, so erhält man ohne weiteres den andern Pfeil. *Kennt man beide Pfeile und will ihre gemeinsame Sehne finden,* so multipliciere man den einen mit dem andern, dann ist sicherlich die Wurzel des erhaltenen Produktes die Hälfte der gesuchten Sehne, durch deren Verdoppelung man die ganze Sehne findet.[2])

Hat man aber die Sehne und den einen Pfeil gegeben, und will die Länge des Durchmessers erhalten, so multipliciert man die Halbsehne mit sich selbst und theilt das Ergebnis durch den bekannten Pfeil. Der Quotient ist die Länge des andern Pfeils. Beide Pfeillängen zusammengezählt machen dann die Länge des ganzen Durchmessers aus.[3])

Nachdem so die Ausmessungen dieses Theiles vollständig erledigt sind, gehen wir zur Darlegung der Ausmessung vielseitiger Figuren über.

Fünfter Theil. Die Ausmessung der vielseitigen Figuren.

1. Wie wir oben in den vorausgeschickten Bemerkungen gezeigt haben, giebt es verschiedene Arten dieser Figuren. Einige sind nämlich *Fünfecke,* andere *Sechsecke,* wieder andere *Siebenecke* und anderer vielerlei Arten. Diese Figuren sind nun bald gleichseitig und gleichwinklig, bald ungleichseitig und ungleichwinklig. Indem wir jetzt ihre Ausmessung zeigen wollen, soll zur näheren Kenntnis derjenigen Figuren, welche gleichseitig und gleichwinklig sind, ein gewisser Satz vorausgeschickt werden. Es ist folgender: *Wenn innerhalb einer geradlinigen Figur ein Kreis beschrieben werden kann, der sämmtliche Seiten derselben berührt, so ergiebt das Produkt des Halbmessers desselben mit der halben Summe aller Seiten der Figur den Inhalt der Figur.*[4])

In jede solche (regelmässige) Figur, nämlich Quadrat u. s. w., lässt sich ein alle Seiten berührender Kreis beschreiben. In diejenigen aber, deren Seiten und Winkel nicht gleich sind, kann niemals ein Kreis beschrieben werden. Deshalb ist sicher, dass, wenn in irgend eine solche Figur, wie in ein Dreieck, ein Quadrat, ein Fünfeck oder irgend eine der andern, ein Kreis, der sämmtliche Seiten berührt, beschrieben werden kann, das Produkt des Halbmessers mit der halben Summe aller Seiten der Figur den Inhalt derselben erzeugt.

---

2) $\text{cord}\,\alpha = 2\sqrt{\text{sag}\,\alpha\,(d - \text{sag}\,\alpha)}$.

3) $d = \text{sag}\,\alpha + \left(\frac{\text{cord}\,\alpha}{2}\right)^2 : \text{sag}\,\alpha$.

4) Leonardo 84, 11.

2. Trianguli quidem tetragonique similiter ostendere nobis super|vaca- 24
neum est, eo quod, qualiter ad eorum arearum cognitionem perveniatur, superius ostendimus.

Pentagoni vero similitudinem, in cuius lateribus *abcde* litterae de-
5 signentur (Fig. 41), et cuius omnia latera omnesque anguli sint ad invicem aequales, indicamus, intra quam circulus *fghkl* ipsius quinque latera contingens circumscribatur, cuius centrum punctus *m*. Dicemus igitur, ⟨quod⟩ multiplicatio medietatis diametri circuli in dimidium omnium quinque laterum pentagoni eius embadum efficiet. Diametri vero dimidium est
10 linea a puncto *m* ad quamlibet punctorum contactus protracta. Quare si a puncto *m*, quod est circuli centrum, ad duo *a*, *b* puncta, quae sunt duo anguli pentagoni, duas lineas protraxerimus, triangulum *mab* constituamus, cuius embadum multiplicatio perpendicularis supra dimidium basis erectae in basis dimidium efficit. Si autem a puncto *m* ad punctum *l*, in quo
15 circulus latus *ab* contingit, lineam produxerimus, erit illa linea perpendicularis trianguli *mab*, quod est diametri illius circuli medietas. Igitur si hanc perpendicularem lineam in dimidium *ab* multiplicaveris, embadum trianguli *mab* procuratur. Manifestum est igitur, quod multiplicatio medietatis diametri in sui lateris dimidium trianguli embadum con-
20 stituit. Hac itaque via quinque triangulos super quinque pentagoni latera constitues, eritque singulorum area ut multiplicatio medietatis diametri in sui lateris dimidium. Quinque vero triangulorum embada simul collecta totius pentagoni embadum constituunt, quod totum ex multiplicatione medietatis diametri in omnium quinque laterum dimidium
25 provenit.[1])

3. Ad istius omnium simulitudinem in omni figura multorum vel paucorum laterum, si circulum in ipsam omnia eius latera contingentem circumscripseris, operari poteris. Et erit etenim eius embadum ut multiplicatio medietatis diametri in omnium eius laterum dimidium.

30 **4.** Et quoniam in omni figura circulus eius omnia latera contingens circumscribi non potest, ad omnium figurarum plus quam quatuor latera continentium dimensiones non est haec regula sufficiens. Quapropter hanc regulam aliam ad omnium figurarum rectilinearum dimensiones sufficientem indicabo.

---

8 quod *in A über der Zeile ausradiert.* — 14 a puncto *l.* — 18 procurabunt. — 22 diametri] dimidium. — 32 sufficiens] subiciens. — 33 sufficiente.

---

1) Leonardo 84, 14.

2. Dies für das Dreieck und ebenso für das Quadrat zu zeigen, ist überflüssig, weil wir schon oben gelehrt haben, auf welche Weise wir zur Kenntnis ihres Inhaltes gelangen.

Als Beispiel eines Fünfecks nehmen wir eines, an dessen Seiten die Buchstaben a, b, c, d, e geschrieben seien (Fig. 41), und dessen Seiten und Winkel sämmtlich einander gleich sind. Innerhalb desselben sei ein alle seine fünf Seiten berührender Kreis $fghkl$ beschrieben, dessen Mittelpunkt m heisse. Wir behaupten also, es mache das Produkt des Halbmessers des Kreises mit der halben Summe aller fünf Seiten des Fünfecks den Inhalt desselben aus. Halbmesser des Kreises ist aber die vom Punkte m nach irgend einem Berührungspunkte gezogene Gerade. Verbinden wir also den Punkt m, das ist den Mittelpunkt des Kreises, mit den beiden Punkten a, b, das sind zwei Ecken des Fünfecks, durch zwei gerade Linien, so bilden wir dadurch das Dreieck mab, dessen Inhalt durch Multiplikation der auf dem Halbierungspunkte der Grundlinie errichteten Höhe mit der halben Grundlinie entsteht. Wenn man aber vom Punkte m nach dem Punkte l, in welchem der Kreis die Seite ab berührt, eine gerade Linie zieht, so ist diese die Höhe des Dreiecks mab und zugleich Halbmesser jenes Kreises. Wenn wir also die Höhe mit der Hälfte von ab multiplicieren, so entsteht dadurch der Inhalt des Dreiecks mab. Es ist also klar, dass das Produkt aus dem Halbmesser und der Hälfte der Seite des Dreiecks dessen Inhalt ausmacht. Auf diese Weise kann man fünf Dreiecke über den fünf Seiten des Fünfecks konstruieren, und der Inhalt jedes einzelnen ist gleich dem Produkte des Halbmessers mit der Hälfte seiner Seite. Die Inhalte der fünf Dreiecke geben aber addiert den Flächeninhalt des ganzen Fünfecks, das also als das Produkt des Halbmessers mit der halben Summe aller Seiten herauskommt.[1])

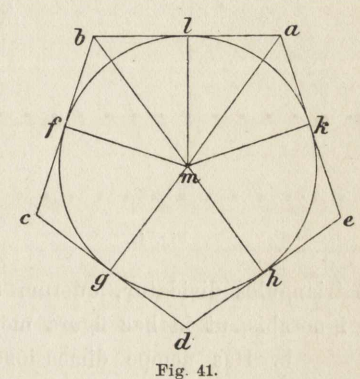


Fig. 41.

3. In genau derselben Weise kann man bei jeder Figur mit vielen oder wenigen Seiten vorgehen, wenn man in sie einen allen Seiten berührenden Kreis einbeschreiben kann, und es wird dann der Inhalt gleich dem Produkte des Halbmessers mit der halben Summe aller Seiten hervorgehen.

4. Da nun nicht in jede Figur sich ein Kreis beschreiben lässt, der alle ihre Seiten berührt, so ist die obige Regel zur Ausmessung aller Figuren, welche mehr als vier Seiten besitzen, nicht ausreichend. Deshalb werden wir noch die folgende Regel angeben, welche für die Ausmessung aller geradliniger Figuren ausreicht.

Scito igitur, quod *omnis plana superficies rectilinea in tot rectilineos triangulos dividitur, quot sunt eiusdem figurae latera duobus inde subtractis,* ut quadrilaterum in duos, pentagonum in tres, exagonum in quatuor, et ita 5 de singulis. Hac igitur regula quamlibet figuram rectilineam per rectilineos triangulos | partire poteris. Cumque 24′ singulorum triangulorum embada, sicut supra docuimus, didiceris, et ea in unum 10 coadunaveris, illius totius figurae aream reperies. Veluti si in praedicto pentagono (Fig. 42) a puncto *a* ad duo *d*, *c* puncta duas rectas lineas protraxeris, ipsum pentagonum in tres ad minus 15 triangulos dividatur, quorum areas addiscens totius pentagoni aream non ignorabis, ut in hac figura monstratur.[1])

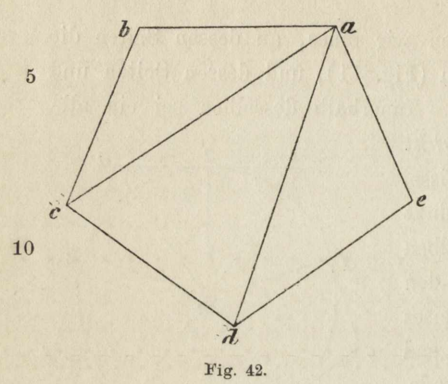


Fig. 42.

5. Has nempe dimensiones, quas hucusque docuimus, sunt agrorum superficialium, quorum superficies a rectitudine et aequalitate non recedunt. Et quia multipliciter agrorum alii in declivio reperiuntur, alii vero super- 20 ficiem quasi gibbosam repraesentant, ne eos metiendo devies, tibi quam maxime dico cavendum. Si campus igitur, cuius aream nosse cupis, in declivi montis latere proiciatur, ipsius altitudinem, quod est eius in alto longitudo a summo capitis usque ad eius radicem, addiscens eius altitudinis multiplicationem ex multiplicatione longitudinis eiusdem campi deme, 25 residuique radicem in ipsius campi latitudinem multiplicans eius incontanter embadum reperies.

6. Si vero campus ille concavus fuerit, hac eadem via procedas, ⟨ut ipsius embadum secundum planam et rectam superficiem addiscas⟩. Illa etenim, quae quolibet ei modo superponuntur, ut semina, arbores et aedi- 30 ficia, secundum rectum angulum et non aliter elevantur. Quare, quod in metiendo propter elevationem vel depressionem supererit, nullum conferret ulli iuvamen: est igitur inde prorsus resecandum.[2])

7. In mensurando vero peritissimi, qualiter montium altitudines, investigarent, summa solertia assiduoque labore didicerunt, ut per eas ad 35 ipsarum arearum cognitionem veraciter provenirent. Quandam enim arundinem in radice montis secundum rectum angulum elevantes in eiusdem arundinis supremo aliam arundinem secundum rectum angulum coaptabant,

5 Hanc igitur regulam. — 19 multipliciter] multiplicationes. — 20 gibosa. — 27—28 ut . . . addiscas *in A auf dem Rande ausradiert.* — 29 quaelibet. — 29—30 haedificia *A.* — 30 Quare pro in.

Man wisse also, *dass jede geradlinige ebene Fläche in soviel geradlinige Dreiecke getheilt werden kann, als die betreffende Figur Seiten hat, weniger zwei.* So das Viereck in zwei, das Fünfeck in drei, das Sechseck in vier u. s. w. Durch diese Regel hat man also die Möglichkeit, jede geradlinige Figur in geradlinige Dreiecke zu zerschneiden. Da man nun den Inhalt der einzelnen Dreiecke, wie wir oben gezeigt haben, finden und sie alle zusammennehmen kann, so erhält man so den Inhalt jener ganzen Figur. Zieht man z. B. in dem oben gezeichneten Fünfecke (Fig. 42) vom Punkte a nach den beiden Punkten d, c zwei gerade Linien, so wird dadurch das Fünfeck mindestens in drei Dreiecke zerschnitten, und indem man von diesen die Inhalte sucht, kennt man auch die Fläche des ganzen Fünfecks, wie aus beigegebener Figur ersichtlich.[1])

5. Die Ausmessungen nun, die wir bis jetzt gelehrt haben, sind solche von Ackerflächen, deren Oberflächen von der Horizontalebene nicht abweichen. Da aber vielfach einige Felder auf Abhängen gefunden werden, andere wieder eine gleichsam einen Höcker bildende Oberfläche darstellen, so rathe ich, man möge sich gar sehr hüten, bei ihrer Ausmessung Fehler zu machen. Wenn nämlich ein Feld, dessen Flächeninhalt man finden will, auf dem Abhange eines Berges liegt, so suche man zunächst die Höhe desselben, das ist seine Abmessung in der Höhe vom Gipfel bis zu seinem Fusse, und subtrahiere das Quadrat dieser Höhe von dem Quadrate der Länge desselben Ackers. Multipliciert man dann die Wurzel des Restes mit der Breite des Feldes, so findet man unverzüglich seinen Flächeninhalt.

6. Wäre aber das Feld vertieft, so müsste man ebenso vorgehen, um seinen Flächeninhalt nach der Horizontalebene zu erhalten. Denn das, was man irgendwie darauf thut, wie Sämereien, Bäume oder Gebäude, wird unter rechtem Winkel und nicht anders errichtet. Das also, was sich beim Messen wegen der Erhöhung oder Vertiefung mehr ergiebt, bringt niemandem irgend welchen Nutzen, und ist deshalb vollständig zu vernachlässigen.[2])

7. Die kundigsten unter den Feldmessern untersuchten nun mit grösster Sorgfalt und beharrlichstem Fleisse, wie sie die Höhen der Berge auffinden könnten, um durch sie zur genauen Kenntnis ihres Inhaltes zu gelangen. Sie errichteten nämlich am Fusse eines Berges eine Latte und verbanden am Kopfende dieser Latte unter rechtem Winkel damit eine zweite Latte von solcher Länge, dass auch der zweite äussere Theil der Kopflatte irgend einen Punkt des Berges berührte. Dann massen sie genau die Länge der Fläche des Berges vom Fusse der senkrechten Latte bis zu dem Punkte, den die obere Latte berührte, und fanden diese Länge immer

1) Leonardo 83, 5 v. u. 2) Leonardo 107, 19.

tantae videlicet longitudinis, ut ipsius vel alterum capitis extrema pars alicui parti superficiei montis adhaereret. Post haec a radice arundinis erectae usque ad locum, quem arundo superposita tangebat, montis superficiem diligenter metiendo illius quantitatem semper maiorem illa quantitate arundinis superpositae, quae est a loco contactus usque ad arundinis erectae verticem, inveniebant, et secundum illam differentiam iudicabant differentiam, quae erat inter declivam et planam montis superficiem.

Ad cuius similitudinem campus in declivi montis constitutus proponatur (Fig. 43), in cuius declivo 20, in latitudine vero 15 ulnae contineantur. Eius autem planam et directam superficiem, supra quam continetur, scire cupientes, super notae longitudinis lineam duas *a*, *b* litteras describamus, ipsiusque longitudinem secundum planam et directam superficiem linea *eb* repraesentat, | altitudo vero eiusdem ab *ae* linea demonstratur. Erit ergo haec figura trigonus *aeb*, in cuius *ab* linea 20, ut praediximus, ulnas invenimus. Et manifestum est, quod campus, qui nobis proponitur, metiendus est ut linea *eb*, quae totius campi basis esse dicitur. Omnis namque campus, in cuius epiphania aliquid est seminandum, vel plantandum, vel superaedificiandum, taliter est metiendus. Quapropter, qualiter ad certam congnitionem longitudinis lineae *eb* ignotae per lineam *ab* notam perveniatur, elaborabimus. Quandam igitur arundinem, loco cuius linea *bc* ponitur, in inferiori parte lineae *ab*, quod est punctus *b*, orthogonaliter constituimus, in cuius supremo capite quandam aliam arundinem, pro qua linea *dc* protrahitur, secundum rectum angulum adaptamus, tantae scilicet quantitatis, ut ex altera sui parte ad praefati campi superficiem perveniat et eam contingat. Triangulus itaque *bcd* triangulo *aeb* similis est elevatus, in cuius *dc* latere duas ulnas et semissem, in alio vero latere *bd* tres tantum et non plus invenimus. Verum quia hi duo trianguli sibimet invicem similes ordinantur, erit proportio lineae *cd* minoris trianguli ad lineam *eb* maioris trianguli ut proportio lineae *db* ad totam lineam *ba*. Quare si *dc*, primum antecedens, in *ba*, secundum consequens, multiplicaverimus, et quod fuerit, per *db*, secundum antecedens, diviserimus, primum *eb* consequens quaesitum ex divisione proveniet. Veluti si duo et semissem, quod est longitudo lineae *dc*, in 20, quae sunt lineae *ab* longitudo, multiplicaverimus, 50 provenient. Cuius numeri summam si in 3, quae sunt lineae *db* longitudo, diviserimus, 17 minus triente reperies, et haec est longitudinis *eb* summa, per quam praedicti

---

17 ephiphania. — 18 superhaedificiandum *A*. — 19 qualiter] quoniam *A*. — 34 50] L *A*. — 35 3] III *A*.

grösser als die Grösse der obern Latte vom Berührungspunkte bis zum Scheitelpunkte der senkrecht errichteten Latte. Und nach dem Betrage dieses Unterschiedes beurtheilten sie den Unterschied, der zwischen der abhängigen und der Horizontalfläche des Berges bestand.

Um ein Beispiel zu zeigen, sei ein Feld gegeben, das auf dem Abhange eines Berges liegt (Fig. 43); der Abhang möge 20, die Breite aber 15 Ellen enthalten. Um aber die Horizontalfläche, auf welcher es enthalten ist, zu finden, schreiben wir an seine bekannte Länge die Buchstaben a, b, seine Länge auf der Horizontalebene stelle die Gerade eb dar, seine Höhe aber sei durch die Gerade ae bezeichnet. Es ist also diese Figur das Dreieck aeb, in dessen Seite ab, wie wir oben sagten, 20 Ellen gefunden sind. Nun ist klar, dass das uns vorgelegte Feld nach der Geraden eb zu messen ist, welche die Grundlinie des ganzen Feldes heisst. Jedes Feld nämlich, auf dessen Fläche etwas zu säen, oder zu pflanzen, oder zu erbauen ist, muss so genommen werden. Wir müssen daher untersuchen, wie wir zur genauen Kenntnis der Länge der unbekannten Linie eb durch die bekannte Linie ab gelangen können. Wir stellen deshalb am untern Ende der Geraden ab, das ist im Punkte b, eine Latte, welche die Gerade bc darstellen soll, senkrecht auf, der wir im Scheitelpunkte eine andere Latte, für welche die Linie dc gezogen werden möge, unter rechtem Winkel verbinden, und zwar von solcher Länge, dass ihr anderes Ende an die Fläche des vorgenannten Feldes heranreicht und sie berührt. Das Dreieck bcd ist dadurch dem Dreiecke aeb ähnlich konstruiert. In seiner Seite dc finden wir $2\frac{1}{2}$ Ellen, in der andern bd nur drei und nicht mehr. Da aber die beiden Dreiecke einander ähnlich angeordnet sind, so wird das Verhältnis der Seite cd des kleinern Dreiecks zur Seite eb des grössern gleich dem Verhältnis der Seite db zur ganzen Länge ab sein. Multipliciert man daher dc, das erste Vorderglied, mit ab, dem zweiten Hintergliede, und dividiert das Produkt durch db, das zweite Vorderglied, so wird aus der Division das gesuchte erste Hinterglied eb hervorgehen. Wenn man also hier $2\frac{1}{2}$, die Länge der Linie dc, mit 20, der Länge der Linie ab, multipliciert, so kommen 50. Theilen wir dann diese Zahl durch 3, das ist die Länge der Linie db, so finden wir 17 weniger $\frac{1}{3}$, und das ist der Betrag der Länge eb, durch welche die Fläche des genannten

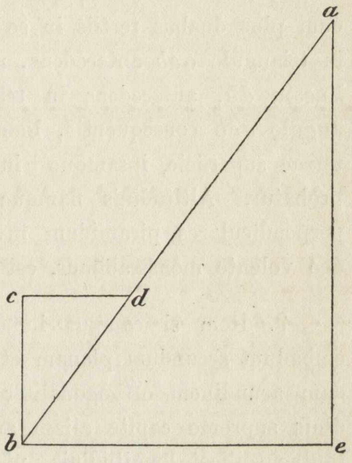


Fig. 43.

campi *eb* embadum est investigandum. Quapropter si 15, quae sunt totius campi latitudo, in lineam *eb*, quae 17 in se minus triente continet, multiplicaverimus, praedicti campi embadum non ignorabimus.[1])

8. Ad huius itaque similitudinem omnes agros, quorum superficies non
5 sunt aequales, directe mensurare debemus. Cumque lineam *cb* in triangulo *dcb* consequens, quae arundo stans, cuius longitudo unam et modicum plus duabus tertiis in se recipit, in totam lineam *ab* notam, quae est in triangulo *aeb* antecedens, multiplicaverimus, et quod fuerit, per notam lineam *db*, antecedens in triangulo *dcb*, diviserimus, lineae *ae*, in tri-
10 angulo *aeb* consequentis, longitudo proveniet, quod est campi altitudo a terrae superficie, ipsamque | in hac figura 11 ulnas et unam 33am continere 25′ probatur. Altitudinis namque numeratio est multis necessaria, nam ad perpendiculares piramidum inveniendas, quemadmodum in quarto capitulo deo volente monstrabimus, est satis ydonea.

15 9. Item si campus in declivo rotundi montis constituatur, et eius embadum secundum planam et directam superficiem nosse desideras, quandam arundinem orthogonaliter in radice montis erigens in eiusdem arundinis supremo capite aliam arundinem secundum rectum angulum coapta, tantae scilicet longitudinis, ut eius alterum caput campi superficiem, sicut
20 supra docuimus, contingat. Et manifestum est, quod duae lineae *db*, *ab* sunt duo arcus circumferentiae eiusdem circuli, et uterque notus, eo quod arcus *ab* campi, cuius embadum quaeritur, longitudinem repraesentat (Fig. 44). Arcus vero *db* est arcus a duabus arundinibus superius ordinatis inclusus, cuius cordam per triangulum, intra quem ipsa continetur,
25 addisces, si lineam *dc* et lineam *cb* in se ipsas duxeris, et duas multiplicationes in unum coadunaveris, collectique radicem acceperis. Ipsa etiam erit longitudo cordae arcus *db*, ut hac in figura subscripta docetur. Istius itaque cordae longitudine nota eius sagittam invenire laboremus, ut per eas ad totius circuli diametrum perveniamus. Manifestum est autem,
30 quod omnis sagitta cordam et arcum in duo partitur aequalia. Huius igitur sagittae loco lineam *ghf* a puncto *g*, quod est cordae dimidium, protractam et arcum *db* in duo aequalia supra punctum *h* secantem constituamus, eamque versus lineam *cb*, donec supra punctum *f* ipsam tangat,

---

6—7 modius plus. — 18—19 coapta, tantae] coaptantae. — 24 corda. — 28 longitudinem. — 29 perveniam.

---

1) Leonardo 108, 12 v. u.

Feldes *eb* zu bestimmen ist. Multiplicieren wir aber 15, das ist die Breite der ganzen Fläche, mit der Geraden *eb*, welche 17 weniger $\frac{1}{3}$ enthält, so werden wir den Flächeninhalt des gegebenen Feldes kennen lernen.[1])

8. Nach Art dieser Betrachtung müssen wir also alle Felder ausmessen, deren Oberflächen nicht in der Horizontalebene liegen. Wenn wir ferner die Gerade *cb*, die im Dreiecke *dcb* das Hinterglied ist, sie heisst die stehende Latte und enthält eine Elle und eine Kleinigkeit mehr als $\frac{2}{3}$, mit der ganzen bekannten Linie *ab*, die im Dreiecke *aeb* das Vorderglied bildet, multiplicieren, und das Produkt durch die bekannte Linie *db*, das Vorderglied im Dreieck *dcb*, dividieren, so kommt die Länge der Geraden *ae*, des Hintergliedes im Dreiecke *aeb*, und sie ist die Höhe des Feldes von der Erdoberfläche. Man findet, dass sie in der vorliegenden Figur $11\frac{1}{33}$ Ellen enthält. Die Berechnung der Höhe ist nämlich vielfach nothwendig, denn sie ist zur Bestimmung der Höhe der Pyramiden sehr nützlich, wie wir im vierten Kapitel, so Gott will, zeigen werden.

9. Ist ferner ein Feld auf dem Abhange eines runden Berges gelegen, und man will seine Fläche nach der Horizontalebene kennen lernen, so errichtet man wieder eine Latte senkrecht am Fusse des Berges, und verbindet mit ihr im Scheitelpunkte rechtwinklig eine zweite Latte von solcher Länge, dass ihr anderes Ende die Fläche des Berges berührt, so wie wir oben gelehrt haben. Nun ist klar, dass die beiden Linien *db* und *ab* zwei Bogen des Umfanges ein und desselben Kreises, und dass beide bekannt sind, weil der Bogen *ab* die Länge des Feldes darstellt, dessen Inhalt wir suchen (Fig. 44), der Bogen *db* aber der Bogen ist, welcher von den beiden oben errichteten Latten eingeschlossen wird. Die Sehne des letzteren findet man vermöge des Dreiecks, dem sie angehört, wenn man jede der beiden Linien *dc* und *cb* mit sich selbst vervielfacht, die beiden Quadrate zusammenaddiert und aus der Summe die Wurzel zieht. Sie ist dann die Länge der Sehne des Bogens *db*, wie in beigegebener Figur gezeigt ist. Nachdem wir so die Länge der Sehne kennen, müssen wir uns bemühen, den Pfeil zu finden, damit wir durch ihn zur Kenntnis des ganzen Kreisdurchmessers gelangen. Es ist aber klar, dass der Pfeil jedesmal die Sehne und den Bogen in zwei gleiche Theile theilt. Für den fraglichen Pfeil ziehen wir daher die Gerade *ghf* vom Halbierungspunkte *g* der Sehne aus, welche den Bogen *db*

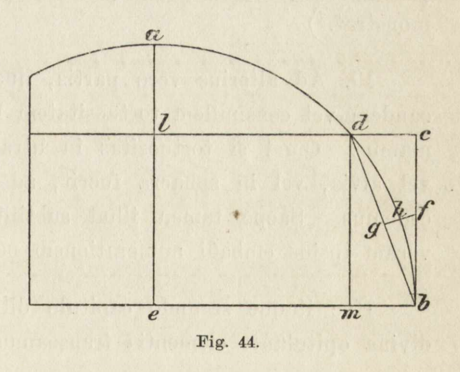


Fig. 44.

extrahamus. Triangulus itaque *fbg* triangulo *bcd* similis constituetur: erit ergo proportio lineae *dc* ad lineam *cb* sicut proportio lineae *fg* ad lineam *gb*. Tres autem lineae *dc*, *cb*, *gb* sunt notae, quarta vero *fg* ignota, quare si notam ⟨lineam *dc*, antecedens, in notam lineam *gb*,
5 consequens, multiplicaverimus, et quod fuerit, per notam⟩ *cb* lineam diviserimus, exibit linea *fg* ignota. Qua reperta qualiter ad lineam *gh* pervenire possimus, ostendamus. Quia igitur proportio *dc* ad *db* est ut proportio *fg* ad *fb*, si lineam *fg* in lineam *db* multiplicaverimus, indeque collectum per lineam *cd* diviserimus, summam lineae *fb* reperiemus. Qua
10 inventa spatium, quod est a puncto *f* noto usque ad punctum *h* subtiliter mensuremus, qua lineae *fh* longitudinem addiscamus. Cumque eam cognoverimus, si eius summam ex summa totius notae lineae *fhg* depresserimus, longitudo lineae *gh*, quae est sagitta quaesita, remanebit, per quam et per cordam *db* circuli diametrum, quemadmodum in fine quartae
15 partis explanavimus, inveniemus. Quo veraciter cognito cordam | arcus, 26 qui noto arcui *ad* duplum exstiterit, sicut in tabulis cordarum et arcuum monstravimus, investigare potuissemus. Erit itaque illius cordae dimidium ut linea *dl* in hac eadem figura. Cui si lineam *dc* notam superadiunxerimus, tota linea *cdl* nota perveniet. Ipsam autem lineae *bme*, quae
20 pro totius obliquitatis campi longitudine ponitur, aequam fore ratio demonstrat.[1])

10. Ad alterius vero partis, quae latitudo dicitur, cognitionem, nisi eandem vel consimilem tortuositatem habuerit, laborandum fore non existimamus. Quod si tortuositas in utraque parte, sicut in apium thalamis,
25 vel alvis, vel in sphaera fuerit, ad istius similitudinem numerando procedemus. Saepe tamen illud subtiliter observare iubemur, quantum ad veram ipsius embadi numerationem perveniamus.

Hoc itaque secundo capitulo diligenter enodato ad tertium capitulum divina opitulante clementia transeamus oportet.

---

1 simul *B*. — 4—5 lineam ... notam *in A auf dem Rande ausradiert.*

---

1) Leonardo 109, 21.

im Punkte *h* in zwei gleiche Stücke theilt, und verlängern sie nach der Geraden *cb* hin, bis sie diese im Punkte *f* trifft. Dann ist das Dreieck *fbg* dem Dreiecke *bcd* ähnlich angeordnet, also ist das Verhältnis der Linie *dc* zur Linie *cb* gleich dem Verhältnis der Linie *fg* zur Linie *gb*. Die drei Linien *dc*, *cb*, *gb* aber sind bekannt, die vierte *fg* unbekannt. Wenn wir also das bekannte Vorderglied, die Gerade *dc*, mit dem bekannten Hintergliede, der Geraden *gb*, multiplicieren, und das Produkt durch die bekannte Gerade *cb* dividieren, so kommt die unbekannte Gerade *fg*. Nach ihrer Bestimmung wollen wir nun zeigen, wie wir zur Linie *gh* kommen können. Da das Verhältnis von *dc* zu *cb* gleich dem Verhältnis von *fg* zu *fb* ist, so finden wir durch Multiplikation der Geraden *fg* mit der Geraden *db* und Division des Produktes durch die Gerade *cd* die Länge der Geraden *fb*. Haben wir diese gefunden, so messen wir genau die Entfernung vom Punkte *f* bis zum Punkte *h*, und haben so die Länge der Strecke *fb* gefunden. Da wir sie nun kennen und ihre Länge von der Länge der ganzen bekannten Linie *fgh* wegnehmen, so bleibt die Länge der Linie *gh* übrig, welche der gesuchte Pfeil ist. Durch ihn und durch die Sehne *db* bestimmen wir, wie am Ende des vierten Theiles auseinandergesetzt ist, den Durchmesser des Kreises. Nachdem dieser genau gefunden ist, können wir die Sehne des Bogens bestimmen, welcher doppelt so gross ist als der Bogen *ad*, wie wir das bei Gelegenheit der Tafel der Sehnen und Bogen gezeigt haben. Die Hälfte dieser Sehne ist also dann gleich der Geraden *dl* in derselben Figur. Addieren wir hierzu die bekannte Gerade *dc*, so kommt die ganze Gerade *dl* als bekannt heraus. Diese ist aber, wie der Augenschein lehrt, der Geraden *bme* gleich, welche als Länge der ganzen Krümmung des Feldes zu gebrauchen ist.[1])

10. Mit der Auffindung des andern Theiles, der die Breite genannt wird, meine ich, wollen wir uns nicht beschäftigen, wenn sie nicht dieselbe oder eine ähnliche Krümmung besitzt. Wäre die Krümmung auf beiden Seiten vorhanden, wie bei den Bienenzellen, oder den Bienenkörben, oder der Kugel, so würden wir mit ähnlicher Berechnung vorgehen. Aber oft muss man sehr genau beobachten, wie man zur richtigen Berechnung des Flächeninhaltes gelangen kann.

Nachdem so dieses zweite Kapitel emsig entwickelt ist, müssen wir mit Gottes gnädigem Beistande zum dritten Kapitel übergehen.

Capitulum tertium in arearum divisionum explanatione.

1. In secundo quidem capitulo agrorum ac domorum dimensionibus executis, eorundemque arearum secundum figurarum alterationes cognitione habita, geometricalibus deductionibus, ut dimensionum modus planius in-
5 telligeretur, adductis, deinceps in hoc tertio capitulo agrorum domorumque divisiones inter consortes et conhaeredes ostendere proposuimus. In singulis etiam divisionibus rationes immo demonstrationes apertas, ut lucidius clarescant, certas insuper regulas, quibus fides adhibenda sit, subiungere decrevimus. A triangulis igitur exordium in dividendo faciemus, quibus
10 diligenter executis quadrilateras et pentagonas aliasque figuras in partes dividere non formidabimus.

2. *Si cuiuslibet trianguli summitas inter duorum dividentium campos exstiterit.* De triangulorum divisoribus, quorum uterque suam trigoni portionem proprio campo velit adiungere, ipsius basim in duo partiaris
15 aequalia. Quo facto ab ipsius summitatis puncto usque ad basis dimidium rectam lineam protrahas, eritque triangulus in duo aequa divisus.

Veluti si triangulus abc (Fig. 45) proponatur, cuius basis linea bc, summitas vero sit punctus a, praedictam basim in duo aequa supra punctum d partiaris. Qua divisa rectam lineam a puncto a usque ad d pro-
20 trahens triangulus abc in duos aequos triangulos adb, adc dividetur. Eorum enim bases sunt ad invicem aequales, et utriusque altitudo est eadem. Duos autem huiusmodi triangulos sibimet invicem aequales esse necesse est, ut in | hac subscripta figura cernitur.[1] 26′

3. *Verum si alterius divisoris terminus in*
25 *directo summitatis praedicti trianguli, cui a suprascribitur, alterius vero terminus in directo basis bc eiusdem trigoni fuerit, et utrique suam portionem in sui termini directo dare volueris* (Fig. 46), ut si altera pars in directo lineae bc, altera
30 vero in directo summitatis, cui a superponitur, existat, utrumque duorum laterum ab, ac sic in duo dividas, ut totius lateris multiplicatio sui maioris portionis multiplicationem duplicem contineat.

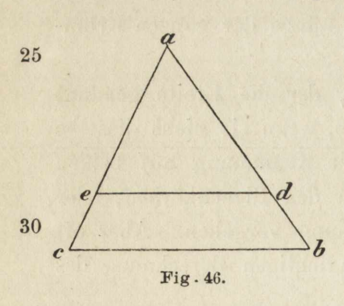


Fig. 46.

Veluti si lineam ac supra punctum d, et lineam ac supra punctum e

1 in arearum] manierarum *B.* — 15 a basis usque. — 29 alteram. — 29—30 alteri vero.

1) Leonardo 110, 13 v. u.

Drittes Kapitel. Die Darlegung der Feldertheilung.

1. Nachdem so im zweiten Kapitel die Ausmessung der Felder und Häuser vollendet ist, und wir ihren Inhalt nach der Verschiedenheit ihrer Gestalten kennen gelernt, und sie durch geometrische Beweise gestützt haben, damit die Methode der Ausmessung deutlicher verstanden würde, haben wir nun in diesem dritten Kapitel die Theilung der Äcker und Häuser unter Genossen und Miterben zu zeigen uns vorgenommen. Bei den einzelnen Theilungsarten haben wir die betreffenden Gründe, vielmehr noch offenkundige Beweise dafür hinzuzufügen beschlossen, damit sie heller und klarer werden, sowie noch gewisse Regeln dafür, denen man Vertrauen schenken darf. Wir werden also von den Dreiecken den Anfang der Theilungen nehmen, und nachdem dieses gründlich durchgeführt ist, uns nicht scheuen, auch die Vierecke, Fünfecke und andere Figuren in Stücke zu theilen.

2. *Wenn die Spitze des Dreiecks zwischen den Feldern der Theilenden eingeschlossen ist,* und wenn von den das Feld Theilenden jeder seinen Theil des Dreiecks seinem eigenen Felde hinzufügen will, theilt man die Grundlinie desselben in zwei gleiche Theile, dann zieht man von der Spitze bis zum Halbierungspunkte der Grundlinie eine gerade Linie, so wird dadurch das Dreieck in zwei gleiche Stücke getheilt sein.

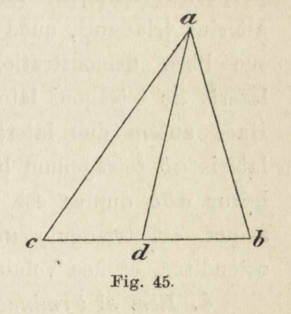


Fig. 45.

Es sei z. B. das Dreieck abc gegeben (Fig. 45), dessen Grundlinie die Gerade bc, die Spitze aber der Punkt a sei, dann halbiert man die genannte Grundlinie im Punkte d. Nachdem sie so getheilt ist, zieht man eine gerade Linie vom Punkte a nach d, und dann ist das Dreieck abc in die beiden gleichen Dreiecke adb, adc getheilt. Ihre Grundlinien sind nämlich gleich, und die Höhe beider ist ein und dieselbe. Zwei dergleichen Dreiecke aber sind nothwendigerweise einander gleich, wie in der beigegebenen Figur zu sehen ist.[1])

3. *Wenn aber die Grenze des einen Theilenden der Spitze des vorgenannten Dreiecks, die mit a bezeichnet ist, anliegt, die Grenze des andern aber an die Grundlinie bc anstösst, und man jedem seinen Theil direkt an seiner Grenze geben will* (Fig. 46), wenn z. B. der eine Theil an der Geraden bc, der andere aber an der Spitze, die mit a bezeichnet ist, anliegen soll, so theilt man jede der beiden Seiten ab, ac so in zwei Stücke, dass das Quadrat der ganzen Seite das Doppelte des Quadrates seines grössern Theiles enthält, also so, dass man die Gerade ac im Punkte d, und die

9*

in duo diviseris, ut tetragonus lineae *ad* dimidium tetragoni lineae *ab*,
tetragonus vero lineae *ae* dimidium tetragoni lineae *ac* continebit. Lineam
igitur a puncto *d* usque ad punctum *e* protrahens triangulum *abc* in duo
aequa, quorum altera pars erit trigonus *adc*, altera vero pars erit super-
5 ficies *debc* almuncharif, ut subiecta figura repraesentat.[1])

Ad horum tetragonorum numerationem pervenies, si ex utriusque
linearum *ab*, *ac* longitudine, a puncto videlicet *a*, quod est trianguli sum-
mitas, quinque septimas minus fere medietate decenae unius septenae partis
acceperis, cuius regula est, ut in 140 partes totam lineam partiaris, ex qui-
10 bus 99 partes minus parte modica sumas.[2]) Quemadmodum, si exempli
causa longitudo lineae *ab* 7 ulnarum exstiterit, linea *ad* 5 ulnas fere
medietate decenae partis unius septenae subtracta continebit. Latus etiam
ac si 10 ulnas in longitudine receperit, linea *ae* 7 ulnas fere dimidio
septenae partis unius ulnarum superaddito in sui longitudine non refutabit.
15 His itaque duobus lateribus ita divisis si *ed* lineam divisionis produxeris,
triangulus *abc* in duo dividatur aequalia, eo quod lineam *ed* sic protractam
basi *bc* aequidistantem fore geometricalis ratio demonstrat. Quare tri-
angulus *ade* triangulo *abc* similis existit: eorum etenim anguli sibimet in-
vicem aequantur. Omnium autem similium triangulorum proportio est ut
20 proportio tetragoni unius lateris trianguli ad tetragonum illius lateris
alterius trianguli, quod ei in proportione similis existit, sicut Euclides in
suo libro demonstrationibus explicat. At in triangulo *abc*, tetragonus
lateris *ac* tetragoni lateris *ae* alterius trianguli *ade* duplus esse probatur.
Haec autem duo latera sunt in proportione consimilia. Item tetragonus
25 lateris *ab* tetragonum lateris *ad* in dupla continet proportione: triangulus
igitur *abc* duplus est triangulo *ade*, superficies igitur *debc* almuncharif
aequa est triangulo *ade*. In duo igitur aequa triangulus *abc* divisus
ostenditur, et hoc voluimus. | 27

4. *Item si terminus alterius duorum divisorum in aliqua parte cuius-*
30 *libet lateris trigoni fuerit, et suam portionem in directo sui termini quaesierit.*

Veluti si in triangulo vel trigono *abc* (Fig. 47) supra latus *ab* circa
punctum *d* terminus divisoris exstiterit, et suam portionem ab ipso *d* puncto
postulaverit, utrum in eiusdem lateris dimidio punctus *d* fuerit, observa.
Qui si in dimidio lateris inventus exstiterit, nil tibi faciendum supererit,
35 praeter quod ab anguli summitate usque ad praedictum *d* punctum rectam
lineam protrahens triangulum in duo secabis aequalia.[3])

---

3 protractis *A*. — 8 medietatem. — 19 similium *fehlt in B*. — 30 quae-
sieris. — 33 utra.

---

1) Leonardo 119, 6. 2) $\sqrt{\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{7}\sqrt{25-\frac{1}{2}} \sim \frac{5}{7} - \frac{1}{140} = \frac{99}{140}$. 3) Leonardo 111, 3 v. u.

Gerade *ac* im Punkte *e* so in zwei Stücke theilt, dass das Quadrat der Geraden *ad* die Hälfte des Quadrates der Geraden *ab*, das Quadrat der Linie *ae* aber die Hälfte des Quadrates der Linie *ac* enthält. Zieht man dann vom Punkte *d* nach dem Punkte *e* eine gerade Linie, so theilt man dadurch das Dreieck *abc* in zwei gleiche Stücke. Der eine Theil ist das Dreieck *adc*, der andere aber das Trapez *debc*, wie die beigegebene Figur zeigt.[1])

Auf rechnerischem Wege gelangt man zu obigen Quadraten, wenn man von der Länge jeder der beiden Geraden *ab*, *ac* vom Punkte *a* aus, das ist von der Spitze des Dreiecks, $\frac{5}{7}$ minus ungefähr der Hälfte eines Siebentels abschneidet, das ist als Regel gefasst, dass man die ganze Linie in 140 Theile theilt und von diesen 99 weniger eine ganze Kleinigkeit nimmt.[2]) Ist z. B. die Länge der Geraden *ab* 7 Ellen, so wird die Gerade *ad* etwa 5 Ellen weniger $\frac{1}{140}$ enthalten. Wenn ebenso die Seite *ac* 10 Ellen in der Länge hat, so wird die Gerade *ae* nahezu 7 Ellen plus $\frac{1}{140}$ Elle in ihrer Länge aufweisen. Sind also die beiden Geraden so getheilt, und man zieht die Theilungslinie *ed*, so zerfällt das Dreieck in zwei gleiche Hälften, weil die so gezogene Linie *ed* aus geometrischen Gründen der Grundlinie *bc* parallel sein muss, und daher das Dreieck *ade* dem Dreiecke *abc* ähnlich ist, denn ihre Winkel sind einander gleich. Das Verhältnis ähnlicher Dreiecke ist aber gleich dem Verhältnis des Quadrates einer Seite des einen Dreiecks zu dem Quadrate der Seite des andern Dreiecks, die ihm proportional entspricht, wie EUKLIDES in seinem Werke beweist. Nun ist aber gezeigt, dass im Dreiecke *abc* das Quadrat der Seite *ac* doppelt so gross ist als das Quadrat der Seite *ae* des andern Dreiecks *ade*. Diese beiden Seiten sind aber proportionalisch ähnlich. Ebenso enthält das Quadrat der Seite *ab* das Doppelte des Quadrates der Seite *ad*: also ist das Dreieck *abc* das Doppelte des Dreiecks *ade*, und folglich ist das Trapez *debc* gleich dem Dreiecke *ade*. Es ist also bewiesen, dass das Dreieck *abc* in zwei Hälften getheilt ist, und das wollten wir.

4. *Fällt ferner die Grenze des einen der beiden Theilenden in irgend einen Punkt einer Seite des Dreiecks, und will er seinen Theil an seine Grenze anliegend erhalten,* wenn also z. B. in dem Dreiecke *abc* (Fig. 47) der Theilpunkt auf der Seite *ab* im Punkte *d* liegt, und er seinen Theil vom Punkte *d* aus fordert, so sehe man zu, ob der Punkt *d* etwa in die Mitte der Seite fällt. Ist er wirklich im Halbierungspunkte der Seite gelegen, so bleibt nichts weiter zu thun übrig, als von der Spitze des Winkels nach genanntem Punkte *d* eine gerade Linie zu ziehen, die das Dreieck in zwei gleiche Stücke theilt.[3])

At si punctus d non in dimidio praefati lateris inventus fuerit, aliter triangulum dividamus oportet. Exempli namque causa praedictum trigoni latus ab 12, secundum vero latus bc 10, tertium quoque latus ac 15 ulnas continere ponamus, punctumque d, qui pro divisoris termino ponitur, prius a puncto b per spatium duarum ulnarum elongemus. Linea igitur ad 10 ulnas continebit, positoque puncto f supra lateris ab dimidium lineam af 6 ulnas continere non dubitabimus: latus etenim ab 12 ulnas habere posuimus. Linea igitur af cum sit totius ab lineae dimidium in 4 ulnis, quae sunt duae quintae totius ad lineae, ab eadem ad linea superabitur. Quapropter ex latere ac, quod est lateri ad contiguum, duas quintas a parte c, quae est trianguli summitas, accipe, et quod fuerit, puncto impresso e signabis. Erit igitur linea ec 6 ulnarum: totum namque latus ac 15 ulnas continere supra posuimus. Quo facto a puncto d usque ad punctum e rectam lineam protrahens totus triangulus in duo dividetur aequalia, quorum altera pars erit trigonus ade, alteram vero partem superficies $debc$ almuncharif sibi perfecte vindicabit.

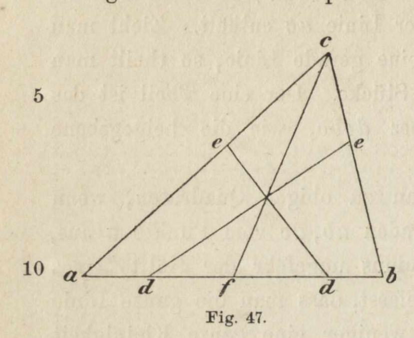


Fig. 47.

Quod si praenominatus terminus d a puncto a per duarum ⟨ulnarum⟩ spatium elongatus fuerit, divisionis lineam non ad latus ac, ut prius, sed ad latus bc dirigas. Duas namque quintas ex latere bc, quod 10 existit ulnarum, a puncto c sumens e puncto signabis. Erit itaque linea ce 4 ulnarum. Divisionis ergo lineam a puncto d ad punctum e sicut in hac figura cernitur, produces. In hac etenim similitudine divisionis linea semper ad latus maiori portioni contiguum transmittatur, quare, si linea bd maior portio fuerit, divisionis lineam ad latus bc producas; si vero non ⟨haec⟩, sed ad linea portio maior exstiterit, ad latus ac producta linea dirigatur.

Istud etiam nullatenus oblivioni traderetur, quod illae duae quintae semper a puncto c, quae est trianguli summitas, sunt assumendae, quoniam ad hunc idem punctum divisionis linea producetur, cum terminus, qui est punctus d, supra dimidium ab lineae ceciderit. Quapropter secundum illam quantitatem, in qua terminus a dimidio lineae elongabitur, erit e punctus a puncto c, qui est trigoni summitas, elongandus. Hoc autem, et si nullo | monstratur exemplo, satis tamen esset apertum. Quod autem exemplo 27′ monstravimus, ideo fecimus, ut auditoribus levius et apertius innotesceret.

12 lineae ab lineam. — 19 altera vero. — 21 ulnarum *fehlt.* — 27 minor *A.* — 28 haec *in A über der Zeile ausradiert.* — 32 hunc] hoc. *Es ist aber sonst stets* punctus *als Masculinum gebraucht.*

Findet man aber, dass der Punkt d nicht in der Mitte der genannten Seite liegt, so muss man das Dreieck auf andere Weise theilen. Nehmen wir z. B. an, es sei die Seite ab genannten Dreiecks 12, die andere Seite bc aber 10, und die dritte ac 15 Ellen lang, und der Punkt d, der als Grenzpunkt des Theilenden genommen wird, sei zunächst vom Punkte b aus um die Länge zweier Ellen entfernt, so wird also die Strecke ad 10 Ellen enthalten, und wenn wir an den Halbierungspunkt der Seite ab den Buchstaben f setzen, so muss unzweifelhaft die Strecke af 6 Ellen enthalten: wir haben ja angenommen, es habe die Seite ab 12 Ellen. Die Strecke af, welche der ganzen Geraden ab Hälfte ist, wird von der Strecke ad um 4 Ellen übertroffen, das sind $\frac{2}{5}$ der ganzen Linie ad. Man schneide deshalb von der Seite ac, die der Seite ad anliegt, von c, dem Scheitel des Dreiecks, aus $\frac{2}{5}$ ab, und bezeichne den Endpunkt durch den Buchstaben e. Dann ist also die Strecke ec 6 Ellen, denn die ganze Seite ac haben wir vorher zu 15 Ellen angenommen. Hierauf wird durch Verbindung des Punktes d mit dem Punkte e durch eine gerade Linie das ganze Dreieck in zwei Hälften getheilt, von denen die eine das Dreieck ade, die andere aber das Trapezoid $debc$ für sich in Anspruch nimmt.

Wäre aber der obengenannte Grenzpunkt d vom Punkte a aus um die Länge zweier Ellen entfernt, so würde man die Theilungslinie nicht, wie früher, nach der Seite ac, sondern nach der Seite bc führen müssen. Man schnitte nämlich $\frac{2}{5}$ von der Seite bc, die 10 Ellen lang ist, vom Punkte c aus ab, und bezeichnete den Endpunkt durch e. Dann ist die Strecke ce 3 Ellen lang. Die Theilungslinie würde alsdann vom Punkte d nach dem Punkte e gezogen, wie in der beigegebenen Figur zu sehen ist. In diesem Falle wird nämlich die Theilungslinie immer nach der Seite, die der grössern Theilstrecke anliegt, gezogen. Ist also bd der grössere Theil, so führt man die Theilungslinie nach der Seite bc; ist aber nicht diese, sondern die Strecke ad der grössere Theil, so wird die Linie nach der Seite ac geführt.

Man behalte auch stets im Gedächtnis, dass die obigen $\frac{2}{5}$ immer vom Punkte c aus, das heisst von der Spitze des Dreiecks, zu nehmen sind, weil die Theilungslinie nach demselben Punkte gezogen wird, wenn der Grenzpunkt, das ist der Punkt d, auf die Mitte von ab fällt, Nach dem Verhältnis also, nach welchem der Grenzpunkt sich von der Mitte der Linie entfernt, muss der Punkt e von dem Punkte c, nämlich der Spitze des Dreiecks, entfernt genommen werden. Das Obige wäre auch, wenn kein Beispiel gezeigt wäre, doch genügend klar gewesen, dass wir aber ein Beispiel durchgeführt haben, ist deshalb geschehen, damit es dem Hörer leichter und offenkundiger einleuchte.

Huius quidem demonstrationem addisces, si a puncto f, qui lineae ab dimidium sibi vindicat, duas lineas, alteram scilicet ad punctum c alteram vero ad punctum e, et si a puncto etiam d ad punctum c aliam rectam lineam produxeris, quemadmodum in hac figura depingitur (Fig. 48). His lineis hac in subscripta figura productis, linea fe lineae cd aequidistans invenietur, eo quod proportio lineae ce ad lineam ea est ut proportio lineae df ad lineam fa. Nam linea ce duas quintas totius lineae ca, linea quoque df duas itidem totius ad lineae quintas amplectitur. Omnesque duo trianguli, qui super eandem basim ad easdem partes in eisdem alternis lineis conformantur sunt aequales ad invicem. Triangulus igitur cdf in hac figura aequus est triangulo cde: sunt enim inter duas subalternas lineas fe, dc et super eandem basim cd. Triangulo igitur cda communiter assumpto erit totus triangulus caf toti superficie $cade$ almuncharif aequalis. Triangulus autem caf trianguli abc dimidium continet, eo quod punctus f im dimidio lateris ab collocatur, superficies itaque $ceda$ almuncharif, quam ei aequalem fore monstravimus, dimidium trianguli abc, ut supra diximus, continet.[1])

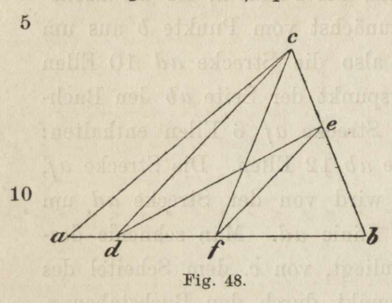


Fig. 48.

5. *Item si triangularis campus,* ut triangulus abc, *tribus divisoribus dividendus proponatur, quorum unus supra unum, alius vero supra aliud, tertius quoque supra tertium trianguli latus suam portionem habere voluerit,* quodlibet trianguli latus, ut exempli causa latus ab supra punctum d, in duo partiaris aequalia. Dehinc a puncto d usque ad punctum c rectam lineam protrahens triangulum in duo aequa secabis. Quo diviso per medium, ex linea cd tertiam sui partem a puncto d sumens puncto e impresso signabis. Post hoc a puncto e duas lineas, alteram scilicet ad punctum a, alteram vero ad punctum b producens in tres aequales partes, quae sunt cea, ceb, aeb, triangulus abc dividetur, ut haec figura repraesentat (Fig. 49).

Istius nempe demonstratio est, quod, quia linea bd aequalis est lineae da, erit trigonus cda trigono cdb aequalis, et quia linea de tertiam totius lineae dc partem continet, trigonus aed totius trigoni acd tertiam partem continebit. Triangulus acd est dimidium trianguli abc, triangulus igitur aec tertia pars | trianguli abc remanebit. Simili quoque ⟨modo⟩ tri- 28

12 eisdem] eiusdem *A*. — 21 divisoribus] dominis *B*. — 31 aequalis est] aequalem. — 35 modo *fehlt*.

1) Leonardo 112, 5.

Den Beweis hierfür führt man so, dass man vom Punkte f aus, der die Mitte der Linie ab bezeichnet, zwei Gerade, eine nach dem Punkte c, die andere nach dem Punkte e, und zugleich vom Punkte d nach dem Punkte c eine andere gerade Linie zieht, wie in der nebenstehenden Figur gezeichnet ist (Fig. 48). Sind diese Linien in der Figur gezogen, so findet man die Gerade fc parallel der Geraden cd, da das Verhältnis der Linie ce zu der Linie ea gleich dem Verhältnis der Linie df zu der Linie fa ist. Denn die Linie ce enthält $\frac{2}{5}$ der ganzen Linie ca, und auch die Linie df umfasst $\frac{2}{5}$ der ganzen Linie da. Nun sind je zwei Dreiecke, welche über derselben Grundlinie nach derselben Seite hin zwischen Parallelen gebildet sind, einander gleich. Das Dreieck cdf in der Figur ist also gleich dem Dreiecke cde: sie liegen eben zwischen den beiden Parallelen fe, dc, und haben dieselbe Grundlinie cd. Nimmt man also beidemale das Dreieck cda hinzu, so ist das ganze Dreieck caf dem ganzen Trapezoid $cade$ gleich. Das Dreieck caf ist aber die Hälfte des Dreiecks abc, weil der Punkt f in der Mitte der Seite ab gelegen ist, also ist das Trapezoid $cade$, das wir als ihm gleich erwiesen haben, die Hälfte des Dreiecks abc, wie wir oben gesagt haben.[1])

5. *Wenn ferner ein dreieckiges Feld,* etwa das Dreieck abc, *gegeben ist, das unter drei Theilende auszutheilen ist, von denen der eine seinen Antheil auf der einen Seite, der zweite aber auf der andern, der dritte endlich auf der dritten Seite des Dreiecks zu haben wünscht,* so theilt man eine beliebige Seite des Dreiecks, z. B. die Seite ab, im Punkte d in zwei gleiche Theile. Dann zieht man vom Punkte d nach dem Punkte c eine gerade Linie, und theilt so das Dreieck in zwei gleiche Stücke. Nachdem es so in zwei Hälften getheilt ist, schneidet man vom Punkte d aus von der Geraden dc ihren dritten Theil ab, und bezeichnet den Endpunkt mit e. Darauf zieht man vom Punkte e zwei Gerade, eine nach dem Punkte a, die andere nach dem Punkte b, und theilt dadurch das Dreieck in drei gleiche Stücke, nämlich in cea, ceb, aeb, wie die beigegebene Figur zeigt (Fig. 49).

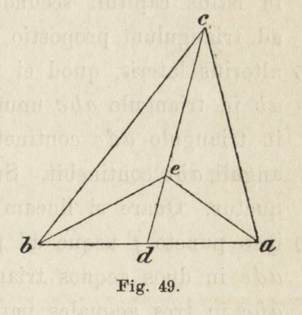


Fig. 49.

Der Beweis dafür ist folgender. Weil die Strecke bd der Strecke da gleich ist, wird das Dreieck cda dem Dreick cdb gleich sein, und weil die Strecke de den dritten Theil der ganzen Strecke dc enthält, so ist das Dreieck aed von dem ganzen Dreiecke acd der dritte Theil. Das Dreieck acd ist die Hälfte des Dreiecks abc, also bleibt das Dreieck aec als dritter Theil des Dreiecks abc übrig. Auf ähnliche Art beweist man, dass

angulum ceb tertiam trianguli abc partem continere probabitur. Hac itaque ratione cognosces, quod triangulus abc in tres aequales partes super eius tria latera dividatur.[1])

6. *Item si tres divisores exstiterint, quorum unus suam portionem supra unum trianguli latus, reliqui vero duo ab eiusdem trigoni summitate suas portiones habere postulaverint.*

Veluti si in triangulo abc (Fig. 50) unus ex tribus divisoribus suam portionem supra latus bc, reliqui vero duo a puncto a, qui est trianguli summitas, suas portiones habere voluerint, utrumque latus ab, ac in duo partiaris inaequalia, ⟨ita⟩ tamen, quod multiplicatio totius lateris semel maioris portionis multiplicationem et insuper eius dimidium contineat. Ut exempli causa latus ab in duas portiones ad, db, latus vero ac in duas itidem ae, ec portiones partiaris ita, quod multiplicatio lateris ad in se ipsum duas tertias totius multiplicationis ab, ⟨et multiplicatio lateris ae duas tertias totius multiplicationis ac⟩ contineat, et triangulus abc in duas inaequales partes dividatur, quarum altera sit superficies $bdce$ almuncharif, quae totius trianguli tertiam partem amplectitur, altera vero pars sit triangulus ade triangulo abc ⟨similis⟩ duas totius trianguli tertias in sui constitutione recipiens, eo quod triangulus ade triangulo abc, quemadmodum in istius capituli secunda figura docuimus, assimiliatur. Trianguli autem ad triangulum proportio ut proportio quadrati unius lateris ad quadratum alterius lateris, quod ei in proportione adsimiliatur. Sed quadratus lateris ab in triangulo abc unum et semissem totius summae quadrati lateris ad in triangulo ade continet, quapropter trigonus ade duas tertias totius trianguli abc continebit. Superficiei igitur $bdec$ almuncharif tertia pars relinquetur. Quare si lineam de in duo aequa supra punctum f diviseris, et ab ipso puncto f usque ad punctum a lineam rectam protraxeris, triangulum ade in duos aequos triangulos afe, afd secabis. Totus itaque triangulus abc in tres aequales partes, quae sunt duo trigoni afe, afd et superficies $bdec$ almuncharif, erit divisus, ut hac in figura monstratur.

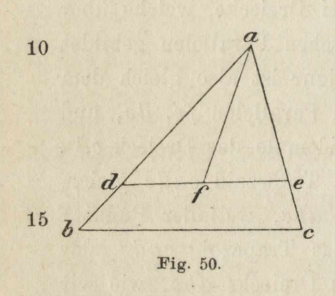


Fig. 50.

Horum item duorum laterum divisiones si per numerum invenire volueris, latus ab 6 ulnas continere proponas, quod cum in duo divisum fuerit, ita tamen, quod totius lateris multiplicatio in se ipsum totam alterius portionis multiplicationem et eius insuper dimidium amplectitur, 5 ulnas

4 unius. — 11 ita *in A über der Zeile ausradiert.* — 17—18 et ... ac *in A auf dem Rande ausradiert.* — 21 similis *fehlt.*

das Dreieck *ceb* den dritten Theil des Dreiecks *abc* enthält. Auf solche Weise ersieht man also, dass das Dreieck *abc* in drei gleiche Theile über den Seiten desselben zerschnitten ist [1])

6. *Sind weiter drei Theilende vorhanden, von denen der eine seinen Antheil auf einer Dreiecksseite, die andern beiden aber von der Spitze des Dreiecks aus zu haben wünschen,* wenn also z. B. für das Dreieck *abc* (Fig. 50) der eine der drei Theilenden seinen Antheil an der Seite *bc*, die beiden übrigen aber vom Punkte *a*, das ist der Spitze des Dreiecks, aus ihre Antheile zu haben verlangen, so theilt man die beiden Seiten *ab*, *ac* jede in zwei ungleiche Stücke, jedoch so, dass das Quadrat der ganzen Seite das Quadrat des grössern Theiles ein und ein halb mal enthält. Z. B. also so, dass die Seite *ab* in zwei Stücke *ad*, *db*, die Seite *ac* aber in die beiden Stücke *ae*, *ec* getheilt werde, so dass das Quadrat der Seite *ad* $\frac{2}{3}$ des Quadrates der ganzen Seite *ab*, und das Quadrat der Seite *ae* $\frac{2}{3}$ des Quadrates der ganzen Seite *ac* enthält, dann wird das Dreieck *abc* in zwei ungleiche Stücke getheilt, von denen das eine das Trapez *bdec* ist, das den dritten Theil des ganzen Dreiecks umfasst, das andere aber das Dreieck *ade* ist, das dem Dreiecke *abc* ähnlich zwei Dritttheile des ganzen Dreiecks in sich begreift, weil nämlich das Dreieck *ade* dem Dreiecke *abc* ähnlich ist, wie wir in dieses Kapitels zweiter Figur gelehrt haben, das Verhältnis eines solchen Dreiecks aber zum andern gleich dem Verhältnis des Quadrates einer Seite des einen zum Quadrate der Seite des andern ist, welche der ersten proportionalisch ähnlich ist, das Quadrat der Seite *ab* aber im Dreiecke *abc* $1\frac{1}{2}$ mal das Quadrat der Seite *ad* im Dreiecke *ade* enthält. Es wird also für das Trapez *bdec* der dritte Theil übrig bleiben. Halbiert man also die Gerade *de* im Punkte *f* und zieht von diesem Punkte *f* nach dem Punkte *a* eine gerade Linie, so theilt diese das Dreieck *ade* in zwei gleiche Dreiecke *afe*, *afd*. Das ganze Dreieck *abc* ist daher in drei gleiche Stücke getheilt, und zwar in die beiden Dreiecke *afe*, *afd* und das Trapez *bdec*, wie die Figur zeigt.

Will man die Theilung der beiden Seiten durch Rechnung finden, so nehme man an, es enthalte die Seite *ab* 6 Ellen. Wird dieses nun in zwei Stücke getheilt, jedoch so, dass das Quadrat der ganzen Seite das $1\frac{1}{2}$-fache des Quadrates des andern Theiles umfasst, so enthält dieser Theil 5 Ellen, von denen $\frac{1}{60}$ einer Elle abgezogen ist. Das Quadrat der ganzen Seite enthält nämlich 36, das Quadrat jenes Theiles macht aber

---

1) Leonardo 120, 12 v. u.

decena unius ulnae inde subtracta illa portio continebit: totius enim lateris multiplicatio 36, multiplicatio quoque illius portionis fere 24 | ulnas efficiet. 28′
Alterius vero lateris longitudinem si 9 ulnas habere dixeris, eius altera pars 7 ulnas et insuper tres decenas ac unius decenae semissem continebit.
5 Huius namque portionis multiplicatio fere 54, multiplicatio quoque totius lateris 81 ulnas constituit, cuius numeri summa totam praenominatae portionis multiplicationem et eiusdem insuper dimidium amplectitur. Ipsius quippe doctrinae regula est, ut radix duarum tertiarum cuiuslibet quadrati 5 sextas radicis totius quadrati decena unius sexta inde subtracta contineat,
10 et sunt 49 partes de 60 partibus totius radicis cuiuslibet quadrati.[1]) Haec itaque regula in huius modi numeratione nullatenus a memoria labatur.

7. *Hoc item alio modo probetur.* Triangulum *abg* constituamus (Fig. 51), de cuius latere *bg* tertia pars, et ex parte *g* excipiatur, et puncto ⟨*d*⟩ etiam signetur, a quo ad punctum *a* linea *da* dirigatur. Post hoc supra
15 lineam *dg* punctus utlibet imprimatur, sitque punctus *e*, a quo ad punctum *a* linea *ea* trahatur. Dehinc ad punctum *d* linea *df* parallela lineae *ea* abstrahatur. Quo facto linea *ef* dirigatur, quam si in duo aequa supra punctum *c* diviseris, et lineam *bc* produxeris, erit triangulus *agb* in tres aequales partes divisus, quae sunt superficies *afge* almuncharif et trianguli
20 duo *fcb*, *bec*. Quod sic probatur. Quia duo trianguli *afd*, *fde* super eandem basim, lineam *fd*, ad easdem partes et in eisdem alternis lineis *df* et *ae* conformantur, sunt ad invicem aequales. Communiter itaque sumpto *fdb*, erit totus triangulus *abd* toti triangulo *feb* aequalis. Triangulus autem *abd* duas totius trianguli *abg* tertias partes continet, igitur tri-
25 angulus *feb* similiter duas tertias partes eiusdem trianguli continet, quae sunt triangulus *fbc* et triangulus *bec*. Superficies itaque *afeg* almuncharif tertiam reliquam partem eiusdem trianguli continet. Divisus est igitur triangulus *abg* in tres aequales partes ita, quod una pars super unum latus *ag* existit, et reliquae duo a summitate eiusdem trianguli, quae
30 est *b*, sunt abstractae.[2])

8. *Item si tres inaequales divisores ⟨exstiterint⟩, quorum scilicet unus dimidium alius vero tertiam, tertius quoque sextam totius triangulateri campi quaesierit, et singuli suas portiones super singula trianguli latera postulaverint.*

35 Ut in triangulo *abc* (Fig. 52) lateris *ab*, supra quod ille, cuius est

---

12 Triangulus. — 13 a parte *d*. — *d fehlt*. — 16 lineam *ea*. — punctum *g*. — 18 triangulus *ace*. — 19 sunt] est *B*. — 31 exstiterint *in A über der Zeile ausradiert*.

---

1) $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{6}\sqrt{24} \sim \frac{5}{6} - \frac{1}{60}$. 2) Leonardo 120, 7.

nahezu 24 Ellen aus. Nimmt man die Länge der andern Seite zu 9 Ellen an, so wird ihr einer Theil 7 Ellen und $\frac{3}{10}$ und die Hälfte eines Zehntels enthalten. Das Quadrat dieses Theiles macht nämlich nahezu 54 aus, und das Quadrat der ganzen Seite 81, und letztere Zahl ist das $1\frac{1}{2}$-fache des vorgenannten Quadrates.

Die Rechnungsregel für diese Lehre ist, dass die Wurzel von $\frac{2}{3}$ eines beliebigen Quadrates $\frac{5}{6}$ der Wurzel des ganzen Quadrates weniger $\frac{1}{60}$ derselben enthält, das sind $\frac{49}{60}$ der ganzen Wurzel eines beliebigen Quadrates.[1]) Diese Regel darf also bei dieser Rechnung niemals dem Gedächtnis entschwinden.

7. *Diese Theilung kann auch auf andere Weise erfolgen.* Wir zeichnen das Dreieck abg (Fig. 51), von dessen Seite bg der dritte Theil, und zwar von b aus genommen und durch den Punkt d bezeichnet werde. Von ihm aus werde nach dem Punkte a die Gerade da gezogen. Dann sei auf der Strecke dg ein beliebiger Punkt angenommen, es sei der Punkt e, und von ihm nach dem Punkte a die Gerade ea gezogen. Man ziehe ferner durch den Punkt d die Linie df parallel der Linie ea und sodann die Linie ef. Theilt man diese im Punkte c in zwei gleiche Stücke und zieht die Gerade bc, so wird das Dreieck abg in drei gleiche Theile zerschnitten, nämlich in das Trapezoid $afge$ und die beiden Dreiecke fcb, bec, was man folgendermaassen beweist. Da die beiden Dreiecke afd, efd über derselben Grundlinie, der Geraden df, nach derselben Seite und zwischen denselben Parallelen df, ae gezeichnet sind, so sind sie einander gleich. Addiert man hierzu das gemeinsame Dreieck fdb, so wird das ganze Dreieck adb dem ganzen Dreieck feb gleich. Das Dreieck adb enthält aber $\frac{2}{3}$ des ganzen Dreiecks abg, also umfasst das Dreieck feb ebenfalls $\frac{2}{3}$ desselben Dreiecks, und diese Drittel sind die Dreiecke fbc und bce. Das Trapezoid $afeg$ enthält also den noch übrigen dritten Theil unseres Dreiecks. Es ist daher das Dreieck abg so in drei gleiche Stücke getheilt, das der eine Theil an der Seite ag anliegt, die beiden andern aber von der Spitze desselben Dreiecks aus, das ist b, genommen sind.[2])

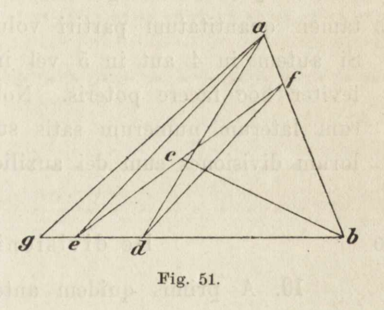


Fig. 51.

8. *Sind ferner drei ungleiche Theilende, von denen der eine die Hälfte, der zweite den dritten Theil, der dritte den sechsten Theil des ganzen dreiseitigen Feldes verlangt, und jeder seinen Antheil auf je einer Seite des Dreiecks erhalten will,* so nimmt man etwa im Dreiecke abc (Fig. 52)

trianguli medietas, suam portionem habere voluerit, tertiam partem, quae est *be*, seorsum accipe. Quo facto lineam a puncto *e* ad puuctum *c*, quod est trianguli summitas, protrahens | eam in duo aequalia supra punctum *d* partiaris, a quo duas rectas lineas, alteram videlicet ad punctum *a*, alteram vero ad punctum *b* dirigens triangulum *abc* in tres inaequales partes secabis, quarum una ipsius dimidium, quod est triangulus *adb*, alia vero eiusdem tertiam, quae est trigonus *adc*, reliqua totius sextam, quae est triangulus *bdc*, continebit, ut in hac figura subscribitur.

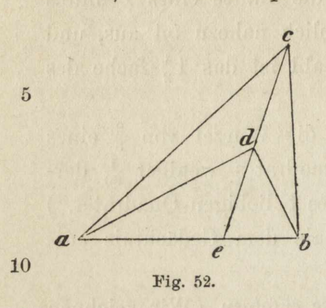


Fig. 52.

Huius autem divisionis demonstrationem non ignorabis, si supradictas demonstrationes memoriae tenaci commendaveris.

9. Quod si triangulum secundum harum divisionum numerum, aliarum tamen quantitatum partiri volueris, ad huiusmodi similitudinem operabis. Si autem in 4 aut in 5 vel in plures partes eum dividere desideraveris, leviter hoc facere poteris. Nobis quidem divisio trianguli secundum suorum laterum numerum satis sufficere debuit. Hoc igitur in loco triangulorum divisiones cum dei auxilio terminemus.

De divisionibus quadrilaterorum.

10. A primis quidem antecessoribus quadrilateras superficies in tria genera dividi compertum est. Quaedam enim earum sunt, quarum utraque diametra sese invicem per aequalia partiantur, quaedam vero, quarum alterum diametrum, cum per aequalia partiatur alterum, ipsum quidem ab eodem per inaequalia dividitur; quaedam etiam aliae sunt, quarum diametra se invicem per inaequalia secant. Hae autem qualiter in duo ac tria nec non et quatuor aequa secundum suorum laterum numerum, sicut et in triangulis ostendimus, ipsae dividantur, in istorum trium generum unoquoque diligenter ostendemus, nec in plures partes earum divisiones indicabimus. Peritissimus vero geometra, qualiter in plura dividantur, leviter investigare poterit.

De divisione quadrilateri in duo aequalia.

11. *Si campus, qui duobus dominis dividendus proponitur, quadratus fuerit* (Fig. 53), cum utraque diametra sese invicem in duo aequa secaverint, eum in duas aequas partes cum diagonali linea a quolibet eius angulo

7 quarum] quare. — 26 Hos. — 32 quadrilateris. — 34 cuius utraque.

von der Seite ab, an welcher derjenige, dem die Hälfte des Dreiecks gehört, seinen Antheil haben will, den dritten Theil, er sei be, besonders, dann zieht man von dem Punkte e nach dem Punkte c, das ist nach der Spitze des Dreiecks, eine Gerade, die man im Punkte d halbiert. Wenn man dann von ihm aus zwei gerade Linien, eine nach dem Punkte a, die andere aber nach dem Punkte b zieht, so hat man das Dreieck in drei ungleiche Stücke getheilt, von denen das eine die Hälfte desselben, nämlich das Dreieck adb, das andere den dritten Theil, das ist das Dreieck adc, das übrige aber von dem Ganzen den sechsten Theil enthält, nämlich das Dreieck bdc, wie in der nebenstehenden Figur gezeichnet ist.

Der Beweis für diese Theilung wird dem nicht unbekannt sein, der die voraufgegangenen Beweise treuem Gedächtnis anvertraut hat.

9. Wollte man das Dreieck in die nämliche Anzahl Stücke, aber nach anderem Grössenverhältnisse theilen, so müsste man in ähnlicher Weise vorgehen. Will man es aber in vier oder fünf oder in noch mehr Stücke zertheilen, so kann man das mit Leichtigkeit thun. Für uns aber musste die Theilung des Dreiecks nach der Zahl seiner Seiten vollständig ausreichen. Hier wollen wir also die Theilung des Dreiecks mit Gottes Hilfe beendigt haben.

Über die Theilung der Vierecke.

10. Von unsern ersten Vorgängern wurden die vierseitigen Flächen in drei Arten unterschieden. Es giebt nämlich solche, deren beide Diagonalen sich gegenseitig halbieren, ferner solche, bei denen die eine Diagonale die andere halbiert, sie selbst aber von ihr in zwei ungleiche Stücke getheilt wird, endlich auch solche, deren Diagonalen einander in ungleiche Stücke theilen. Wie diese in zwei, in drei und auch in vier gleiche Theile nach der Anzahl ihrer Seiten zerschnitten werden können, wollen wir wie bei den Dreiecken, und zwar für jede der drei Arten besonders, vollständig zeigen, die Theilung in mehr Stücke aber nicht. Ein kluger Geometer wird aber leicht auffinden, wie sie in mehr Stücke getheilt werden können.

Die Theilung des Vierecks in zwei Stücke.

11. *Ist das Feld, das unter zwei Herren zu vertheilen ist, ein Quadrat* (Fig. 53), so kann man es, da beide Diagonalen sich gegenseitig halbieren, durch jede der beiden von einer Ecke nach der gegenüberliegenden gezogene Diagonalen theilen. Ebenso wird es auch von einem

ad angulum protracta partiri poteris. Similiter etiam a quolibet puncto super eius quolibet latere dato in duo aequalia secabitur.[1])

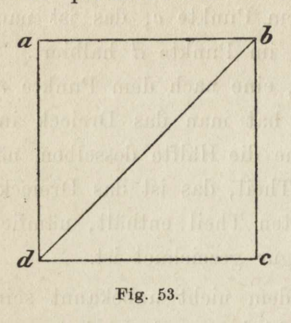


Fig. 53.

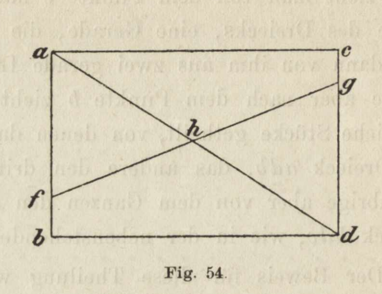


Fig. 54.

12. *Quod si parte altera longior vel rhombus seu rhomboides in divisione proponitur,* eorum itidem diametra sese invicem per aequalia par-
5 tiuntur. Ab eorum igitur angulis in duo aequa ⟨eos⟩ secari poteris. Si autem a quolibet puncto supra quodlibet eorum latus insignito huiusmodi quadrilaterum dividere volueris, ut si a puncto f supra latus ab (Fig. 54) longe ab eius dimidio secundum duarum ulnarum quantitatem dato, superficiem $abcd$ parallelogrammum in duo | aequa secare desideraveris, supra 29′
10 latus cd punctum g longe ab eius dimidio secundum quantitatem duarum ulnarum signabis, quod sic facies. Ab angulo scilicet d, qui angulo a ex opposito ponitur, supra dc latus secundum lineae af quantitatem metire, et quod fuerit, puncto g impresso signabis. Post haec a puncto g ad punctum f lineam gf protrahens, quadrilaterum $abcd$ in duas aequas super-
15 ficies $bfgd$, $afcg$ almuncharif secabis.

Huius nempe divisionis demonstratio est, quod, si diametrum ad protraxeris, lineam gf in duo aequa supra punctum h secabit, eritque triangulus ghd triangulo afh aequalis. Quadrilaterum itaque $afge$ aequale erit quadrilatero $fbdg$. Simili quoque demonstratione hoc idem probaretur,
20 si diametrum bc protrahitur.[2])

13. *Item si quadrilaterum illud non fuerit parallelogrammum, sed alterum duorum diametrorum in duo aequa diviserit alterum, ipsum autem ab eodem per inaequalia secabitur.* Ut exempli causa quadrilaterum $abcd$ (Fig. 55), cuius diametrum bd alterum diametrum ac supra punctum e in
25 duo dividit aequalia, ipsumque super idem punctum e per inaequalia secatur, ab angulo b ad angulum d vel e converso dividens in duos aequos triangulos abd, bcd a diametro bd secabitur.

14. Quod si idem quadrilaterum ab angulo a vel c partiri volueris, diametrum ab eorum alterutro protractum illud per inaequalia partietur.

---

4 itidem] inde *A*. — 5 eos *fehlt*. — 7 quadratum. — 11 quod si. — qui] quod.

beliebigen Punkte auf einer beliebig gegebenen Seite in zwei gleiche Stücke zertheilt.[1])

12. *Wird zur Theilung ein Rechteck, ein Rhombus oder ein Rhomboid vorgelegt,* so schneiden ihre Diagonalen in ähnlicher Weise einander in gleiche Theile, man kann sie also von den Ecken aus in zwei gleiche Stücke theilen. Soll aber ein solches Viereck von einem beliebigen auf irgend einer Seite desselben festgelegtem Punkte getheilt werden, wie wenn etwa vom Punkte f auf der Seite ab (Fig. 54) aus, der von ihrer Mitte um 2 Ellen Länge abstehend gegeben ist, das Parallelogramm $abcd$ in zwei gleiche Stücke getheilt werden soll, so bestimmt man auf der Seite cd den Punkt g, der ebenfalls von ihrer Mitte um die Grösse zweier Ellen absteht. Das macht man aber so: Von der Ecke d nämlich, welche der Ecke a gegenüberliegt, misst man auf der Geraden dc die Länge der Linie af ab, und bezeichnet den Endpunkt mit g. Dann zieht man vom Punkte g nach dem Punkte f die Gerade gf und theilt dadurch das Viereck $abcd$ in die zwei gleichen Trapeze $bfgd$, $afcg$.

Der Beweis dieser Theilung liegt darin, dass, wenn die Diagonale ad gezogen wird, sie die Gerade gf im Punkte h halbiert, und das Dreieck ghd dem Dreiecke afh kongruent wird. Also ist das Viereck $afgc$ dem Viereck $fbdg$ gleich. Dasselbe könnte in gleicher Weise bewiesen werden, wenn man die Diagonale bc ziehen würde.[2])

13. *Wäre ferner jenes Viereck kein Parallelogramm, sondern theilte die eine Diagonale die andere in gleiche Theile, sie selbst aber würde von der letzteren in ungleiche Stücke zerschnitten,* wie z. B. das Viereck $abcd$ (Fig. 55), dessen Diagonale bd die andere Diagonale ac im Punkte e halbiert, selbst aber in dem nämlichen Punkte e in ungleiche Stücke getheilt wird, so zieht man von der Ecke b nach dem Endpunkte d oder umgekehrt die Diagonale bd, dann wird es dadurch in die beiden gleichen Dreiecke abc, bcd zerschnitten.

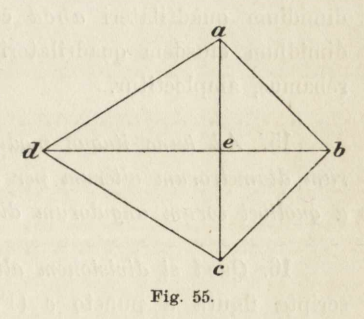


Fig. 55.

14. Soll dasselbe Viereck vom Eckpunkte a oder c aus getheilt werden, so würde es die von einem derselben gezogene Diagonale in ungleiche Stücke theilen. Man muss daher die Diagonale bd im Punkte f halbieren.

---

1) Leonardo 122, 5 v. u. 2) Leonardo 123, 14.

Quapropter diametrum *bd* supra punctum *f* in duas aequales partes abscidas oportet. Quo facto proportionem lineae *ef* ad lineam *ed* diligenter investigans secundum investigatae proportionis quantitatem, si a puncto *a* divisionis initium feceris, ex linea *cd* sumes, et quod fuerit, puncto *g*
5 signabis, a quo ad angulum *a* lineam *ga* dirigens quadrilaterum in duo secabis aequalia (Fig. 56).

Verbi gratia utrumque duorum laterum *ab*, *bc* 10 ulnas et tres insuper quintas, utrumqe vero duorum reliquorum laterum *ad*, *dc* 15 ulnas contineat. Diametrum itaque *bd*, quod ab *ac* diametro per inaequales
10 partes *be*, *de* dividitur, 17 ulnas et tres quintas continebit, eritque linea *ed* 12 ulnarum. Cumque hoc diametrum in duo aequa supra punctum *f* diviseris, ⟨et⟩ linea *fd* 9 ulnas minus una quinta recipiet, linea igitur *ef* 3 ulnas et unam quintam amplectitur. Quod si secundum quantitatem proportionis lineae *ef* ad *ed* ex linea *cd* suppresseris, lineam *cg* 4 ulnas habere
15 non dubitabis. Cumque a puncto *a* ad punctum *g* rectam lineam produxeris, quadrilaterum *abcd* | in duo partiaris aequalia, quae sunt trigonus 30 *agd* et superficies *abcg* almuncharif, ut haec figura repraesentat.

Ad huius nempe divisionis demonstrationem si duas lineas *af*, *cf* protraxeris, duos triangulos *cfb*, *afb* in unum coniunctos dimidium quadri-
20 lateri *abcd* continere cognosces. Hi autem duo trianguli superficie *abcg* almuncharif sunt aequales. ⟨Triangulum etenim *acf* triangulo *acg* aequalem esse non denegas, quia supra eandem *ac* basim et inter alternas *ca*, *gf* lineas contineatur. Triangulo itaque *abc* adiuncto⟩ superficies igitur *cfab* almuncharif superficiei *cgab* almuncharif aequatur. At superficies *cfab*
25 dimidium quadrilateri *abcd* continet, superficies itaque *cgab* almuncharif dimidium eiusdem quadrilateri *abcd*, quod in duo aequalia dividere quaerebamus, amplectitur.

15. *Ad hunc itaque modum omnia quadrilatera, quorum neutrum duorum diametrorum alterum per aequalia partitur, in duo aequa secabis, cum*
30 *a quolibet eorum angulorum divisiones facere volueris.*[1])

16. *Quod si divisionem aliter facere cupis,* quemadmodum ⟨si⟩ in subscripta figura a puncto *e* (Fig. 57) supra latus *ab* impresso divisionis initium facere proposueris, prius ab angulo *b* lineae *ab*, sicut in supra-

---

12 et *fehlt in A.* — lineam. — 21—23 Triangulum . . . adiuncto *habe ich sinngemäss hinzugefügt. Der Schreiber von B hat nicht gemerkt, dass im Texte etwas fehle, und hat deshalb, da scheinbar zweimal genau dasselbe gesagt ist, am Rande hinzugefügt:* Totum illud superfluum est. — 25 quadrilateris. — 29 segabis.

Ist das geschehen, so sucht man genau das Verhältnis der Geraden *ef* zur Geraden *ed*, und schneidet nach der Grösse des gefundenen Verhältnisses, wenn vom Punkte *a* aus getheilt werden soll, von der Geraden *cd* ein Stück ab, dessen Endpunkt man mit *g* bezeichnet. Zieht man von ihm nach dem Endpunkte *a* die Gerade *ga*, so theilt man dadurch das Viereck in zwei gleiche Stücke (Fig. 56).

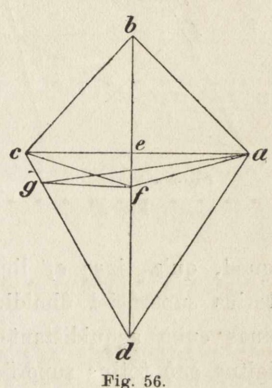


Fig. 56.

Es enthalte z. B. jede der beiden Seiten *ab*, *bc* $10\frac{3}{5}$ Ellen, jede der beiden andern Seiten *ad*, *dc* aber 15 Ellen. Die Diagonale *bd*, die von der Diagonale *ae* in ungleiche Stücke *be*, *de* geschnitten wird, soll $17\frac{3}{5}$ Ellen enthalten, und es wird die Strecke *ed* 12 Ellen sein. Da die Diagonale im Punkte *f* halbiert ist, so wird die Strecke *fd* 9 Ellen weniger $\frac{1}{5}$ enthalten. Die Strecke *ef* umfasst daher $3\frac{1}{5}$ Ellen. Schneidet man nun gemäss dem Werthe des Verhältnisses der Linie *ef* zu *ed* von der Geraden *ed* ab, so wird sicherlich die Strecke *cg* 4 Ellen enthalten und wenn man jetzt vom Punkte *a* nach dem Punkte *g* eine gerade Linie zieht, so wird dadurch das Viereck *abcd* in zwei gleiche Stücke getheilt, nämlich in das Dreieck *agd* und das Trapezoid *abcg*, wie nebenstehende Figur darstellt.

Zieht man zum Beweise der Theilung die beiden Geraden *af*, *cf*, so sieht man, dass die beiden Dreiecke *cfb*, *afb* zusammengenommen die Hälfte des Vierecks *abcd* ausmachen. Diese beiden Dreiecke sind aber dem Trapezoid *abcg* gleich. Dass das Dreieck *acf* nämlich dem Dreiecke *acg* gleich ist, sieht man ein, weil sie auf derselben Grundlinie *ac* und zwischen den Parallelen *ca*, *gf* enthalten sind. Fügt man das Dreieck *abc* hinzu, so ist das Trapezoid *cfab* dem Trapezoid *cgab* gleich. Das Trapezoid *cfab* enthält aber die Hälfte des Vierecks *abcd*, also umfasst das Trapezoid *egab* ebenfalls die Hälfte des Vierecks *abcd*, das wir halbieren wollten.

15. *Auf dieselbe Weise kann man auch alle Vierecke, vvn denen keine Diagonale die andere in gleiche Stücke theilt, in gleiche Theile zerschneiden, wenn man von irgend einem Eckpunkte aus die Theilung ausführen will.*[1])

16. *Wünscht man die Theilung anders zu bewirken,* wie wenn wir in nachstehender Figur den Anfangspunkt der Theilung in den Punkt *e* setzen (Fig. 57), der auf der Seite *ab* angenommen ist, so muss man zu-

1) Leonardo 138, 10.

scripta figura monstravimus, totam superficiem in duo aequa partiaris, eruntque duae portiones triangulus *bcf* et superficies *abfd* almuncharif. Linea igitur *bf* ab angulo *b* protracta totam hanc superficiem primo in duo dividet aequa. 5 Qua sic divisa, a puncto *f* ad punctum *e* linea *fe* producta si lineae *cb* subalterna fuerit, a puncto *e* ad punctum *c* lineam *ce* dirigens, totam superficiem in duo aequa secabis. Erit itaque superficies *aecd* almuncharif triangulo 10 *ebc* aequalis, ut haec figura prima declarat.

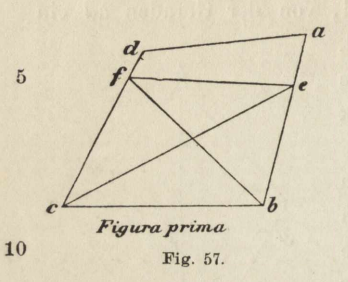


Fig. 57.

Istius quippe divisionis demonstratio est, quod, quia linea *ef* lineae *bc* subalterna protrahitur, triangulus *fcb*, qui totius superficiei dimidium amplectitur, triangulo *ecb* erit aequalis. Inter duas enim aequidistantes et super eandem basim collocantur. Triangulus 15 igitur *ecb* totius superficiei dimidium continebit.[1])

17. *Verum si linea ef lineae bc subalterna non fuerit,* a puncto *b*, quod in superficiei angulo designatur, linea *bg* lineae *bf* infra vel extra superficiem, prout sors dederit, aequidistanter protrahas. *Si autem infra superficiem ceciderit, ut in hac secunda* 20 *figura* (Fig. 58) *cernitur,* a puncto *e* ad punctum *g* lineam *eg* producens, tota superficies in duo secabitur aequalia, quae sunt duae portiones *aedg*, *ebcg* almuncharif. Manifestum 25 est etenim, ut supra diximus, | quod 30′ trigonus *fbc* totius superficiei dimidium continet, et quod triangulus *bgf* triangulo *egb* existit aequalis,

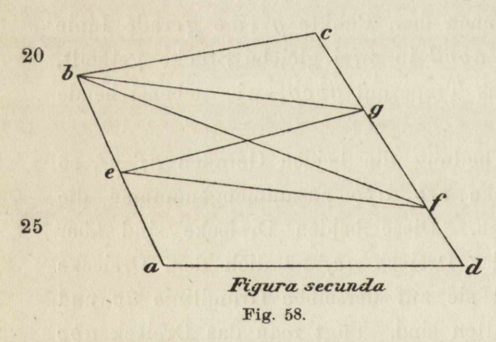


Fig. 58.

eo quod intra duas aequidistantes lineas continentur. Quare, si utrique 30 superaddatur triangulus *bgc*, erit triangulus *fbc* aequalis superficiei *ebcg* almuncharif. Superficies igitur *abcg* totius superficiei dimidium continebit. Alteram vero medietatem superficies *aedg* almuncharif, ut supradiximus, amplectitur.[2])

18. ⟨*Si autem*⟩ *extra superficiem, ut in hac tertia figura, ceciderit linea* ⟨*bg* 35 (Fig. 59), lineam⟩ *dc* usque ad punctum *g* usque ad supra dictam lineam *bg* producatur. Post haec duae lineae *eg*, *ec* a puncto *e* ad duo puncta *g*, *c* dirigentur. Dehinc a puncto *g* linea *gh* aequidistans lineae *ec* extrahatur.

---

1 aequa partieris aequalia *A*. — 34 Si autem *fehlt*. — 34—35 *bg* lineam *fehlt*. — 35 at *B*. — suprn dicta linea.

erst vom Eckpunkte *b* der Geraden *ab* aus in derjenigen Art, die wir in der vorherigen Nummer gezeigt haben, die ganze Fläche in zwei gleiche Stücke zertheilen; es mögen die beiden Theile das Dreieck *bef* und das Trapezoid *abfd* sein. Die von dem Punkte *b* aus gezogene Gerade *bf* wird also diese ganze Fläche zunächst in zwei Hälften theilen. Ist nach dieser Theilung die vom Punkte *f* nach dem Punkte *e* gezogene Gerade *fe* der Geraden *cb* parallel, so ziehe man vom Punkte *e* nach dem Punkte *c* die Gerade *ce*, dann halbiert man dadurch die ganze Fläche. Es ist also das Trapezoid *aecd* dem Dreiecke *ebc* gleich, wie die erste Figur zeigt.

Der Beweis der Theilung folgt daraus, dass das Dreieck *fcb*, welches die Hälfte der ganzen Fläche enthält, weil die Gerade *ef* der Geraden *bc* parallel verläuft, dem Dreiecke *ecb* gleich wird. Sie liegen nämlich zwischen Parallelen und über derselben Grundlinie. Das Dreieck *ecb* umfasst daher die Hälfte der ganzen Fläche.[1])

17. *Ist aber die Gerade ef der Geraden bc nicht parallel,* so ziehe man vom Punkte *b*, dem einen Eckpunkte der Fläche, die Gerade *bg* parallel der Linie *ef* innerhalb oder ausserhalb der Fläche, wie der Zufall es will. *Fällt sie zunächst innerhalb der Fläche, wie in der zweiten Figur* (Fig. 58) *zu sehen ist,* so ziehe man vom Punkte *e* nach dem Punkte *g* die Gerade *eg*, wodurch die ganze Fläche in zwei Hälften getheilt wird, nämlich die beiden Trapezoide *aedg*, *ebcg*. Denn es ist klar, dass, wie wir oben sagten, das Dreieck *fbc* die Hälfte der ganzen Fläche enthält, und dass das Dreieck *bfg* gleich dem Dreiecke *agb* sein wird, da sie zwischen zwei Parallelen enthalten sind. Fügt man also zu jedem das Dreieck *bgc* hinzu, so wird das Dreieck *fbc* gleich dem Trapezoid *ebcg* sein, und das Trapezoid *ebcg* enthält daher ebenfalls die Hälfte der Fläche. Die andere Hälfte umfasst, wie wir oben sagten, das Trapezoid *aedg*.[2]).

18. *Fällt aber die Parallele bg ausserhalb der Fläche, wie in der dritten Figur* (Fig. 59), so verlängere man die Gerade *dc* bis zum Punkte *g* in der eben genannten Geraden *bg*. Dann ziehe man die beiden Geraden *eg*, *ec* vom Punkte *e* nach den beiden Punkten *g* und *c*, ferner werde vom Punkte *g* aus die Gerade *gh* parallel der Geraden *ec* gezogen. Sind diese Geraden gezeichnet, und man zieht vom Punkte *e* nach dem

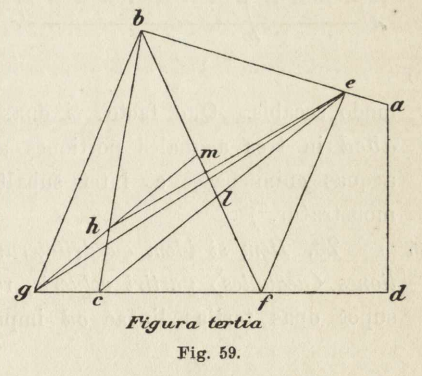


Figura tertia
Fig. 59.

1) Leonardo 138, 18. 2) Leonardo 138, 29

His lineis ita productis, si a puncto e ad punctum h lineam produxeris, totam superficiem in duas aequales partes, quae sunt trigonus ehb et pentagonum $aehcd$ secabis.

Cuius demonstratio est, quod, quia linea ef lineae bg subalterna 5 ponitur, erit trigonus bfg aequalis triangulo beg. Trigonus etiam geh trigono gch probatur aequalis: inter duas enim aequidistantes lineas ec, gh collocantur. Quare, si de triangulo bfg triangulum cgh, et de triangulo bgc triangulum cgh depresseris remanebunt duo trianguli bhg, bcf duobus triangulis bhg, beh aequales. Dempto itaque triangulo bhg communi, 10 remanebit trigonus bcf aequus triangulo beh. Triangulus autem bcf totius superficiei dimidium amplectitur, triangulum igitur beh eiusdem superficiei dimidium continere nullus ambigit.[1])

Qualiter autem in hac tertia figura praedictam lineam gh aequidistantem lineae ec protrahas, ostendemus. Igitur si proportionem lineae gc 15 ad lineam cf cognoveris, et secundum illam proportionem ex linea fl a puncto l versus b sumpseris et puncto m impresso signaveris, post hac a puncto g ad notam m lineam ghm protraxeris, eam lineae ec subalternam fore non dubitabis. Nam quoniam in triangulo fmg linea cl protrahitur, erit proportio lineae cf ad lineam cg sicut proportio lineae fl ad lineam lm, 20 linea igitur ghm lineae ce erit, ut supra diximus, subalterna.

19. *Si quadrilateri cuiuslibet omnia latera subalterna fuerint, cuius embadum in tres aequales sectiones supra quolibet eius latere secare volueris,* ut si quadrilaterum $abcd$ (Fig. 60), cuius omnia latera sibimet invicem 25 subalterna sunt, supra latus ab dividere quaesieris, idem ab latus in tres aequales partes | supra duo 31 puncta ⟨f, e, alterum quoque latus subalternum cd in tres aequales 30 partes supra puncta⟩ g, h simili modo secabis. Quo facto, si duas lineas eg, fh protraxeris, quadrilaterum $abcd$ in tres aequales portiones abscindes, quae sunt ag, eh, fd. Super aequas enim bases et inter subalternas lineas continentur, ut hac figura monstratur.[2])

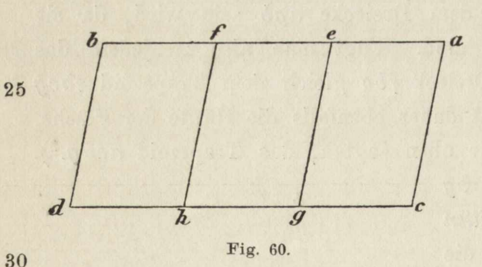


Fig. 60.

35 **20.** *Item si idem quadrilaterum $abcd$ ab angulo incipiens in tres portiones ⟨aequales⟩ partiri volueris,* rectam lineam a puncto a ad punctum h super duas tertias lineae cd impressum protrahens trigonus ach tertiam

10 aequo. — 12 ambigitur *A.* — 26 idem] id est. — laterum. — 28—30 f, e alterum . . . puncta *habe ich hinzugefügt.* — 36 aequales *fehlt.*

Punkte *h* die Gerade *eh*, so theilt diese die ganze Fläche in zwei gleiche Stücke, nämlich das Dreieck *ehb* und das Fünfeck *aehcd*.

Der Beweis ist folgender: Da die Gerade *ef* parallel der Geraden *bg* gezogen ist, so ist das Dreieck *bfg* dem Dreiecke *bge* gleich. Ebenso wird auch das Dreieck *geh* dem Dreicke *gch* gleich erwiesen: sie sind nämlich zwischen den Parallelen *ec*, *gh* gelegen. Zieht man also vom Dreiecke *bfg* das Dreieck *cgh*, und vom Dreiecke *bgc* das Dreieck *cgh* ab, so bleiben die beiden Dreiecke *bhg*, *bcf* zusammen gleich den beiden Dreiecken *bhg*, *beh* übrig. Nimmt man daher das gemeinsame Dreieck *bhg* weg, so bleibt das Dreieck *bcf* gleich dem Dreiecke *beh* übrig. Das Dreieck *bcf* ist aber die Hälfte der ganzen Fläche, also enthält zweifelslos auch das Dreieck *beh* die Hälfte dieser Fläche.[1])

Wie man aber in dieser dritten Figur die obengenannte Gerade *gh* parallel der Geraden *ce* ziehen kann, wollen wir zeigen. Wenn man nämlich das Verhältnis der Geraden *gc* zu der Geraden *cf* kennt und nach demselben Verhältnis von der Geraden *fl* vom Punkte *l* aus gegen *b* ein Stück abschneidet und den Endpunkt mit *m* bezeichnet, dann aber vom Punkte *g* nach dem Punkte *m* die Gerade *ghm* zieht, so muss diese der Geraden *ec* parallel sein. Denn da im Dreiecke *fmg* die Gerade *cl* gezogen ist, wird das Verhältnis der Geraden *cf* zu der Geraden *cg* gleich dem Verhältnis der Geraden *fl* zu der Geraden *lm* sein: es ist also die Linie *ghm* der Geraden *ce* parallel, wie wir oben gesagt haben.

19. *Wenn die Seiten eines beliebigen Vierecks parallel sind, und man den Inhalt in drei gleiche Stücke von einer beliebigen Seite aus theilen will,* wie wenn man etwa das Viereck *abcd* (Fig. 60), dessen Seiten einander parallel sind, von der Seite *ab* aus zu theilen wünscht, so theilt man die Seite *ab* in drei gleiche Abschnitte in den beiden Punkten *e*, *f*, und ebenso die ihr parallele Seite *cd* in drei gleiche Theile in den Punkten *g*, *h*. Wenn man hierauf die beiden geraden Linien *eg*, *fh* zieht, ist das Viereck *abcd* in drei gleiche Stücke zertheilt, nämlich *ag*, *eh*, *fd*. Sie sind nämlich auf gleichen Grundlinien und zwischen denselben Parallelen enthalten, wie die nebenstehende Figur zeigt.[2])

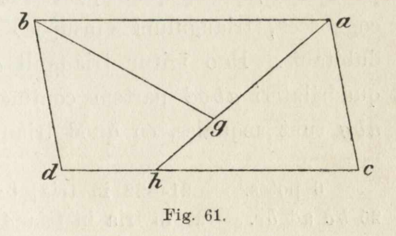


Fig. 61.

20. *Will man ferner dasselbe Viereck vom Eckpunkte a aus beginnend in drei gleiche Theile theilen,* so zieht man eine gerade Linie vom Punkte *a* nach dem Punkte *h*, der $\frac{2}{3}$ der Linie *cd* abschneidet, dann enthält das Dreieck *ach*

1) Leonardo 138, 4 v. u. 2) Leonardo 124, 13.

totius quadrilateri partem continebit. Dehinc reliquam superficiem *abdh* almuncharif ab angulo *b*, ut superius ostendimus, in duo aequa cum linea *bg* diligenter abscindens quadrilaterum *abcd* in tres aequales portiones, quae sunt duo trianguli *ach*, *agb* et superficies insuper *bghd* almuncharif, 5 secabitur, ut haec figura (Fig. 61) repraesentat.[1])

Huius autem divisionis demonstrationem, quia leviter sciri potest, reticemus.

21. *Quod si quadrilaterum parallelogrammum non fuerit,* ut hoc subscriptum quadrilaterum *abcd* (Fig. 62), cuius alterum duorum diametrorum *ac* 10 alterum *bd* diametrum supra punctum *e* per inaequalia secat, si linea *de* dimidium lineae *eb* in sui quantitate receperit, ut hac in figura cernitur, triangulus *dca* tertiam totius quadrilateri partem 15 continebit, trigonus vero *acb* duas tertias reliquas sibi perfecte vindicabit, quem si in duo aequa utlibet, quemadmodum supra docuimus, diviseris, quadrilaterum *abcd* in tres aequales partes dividetur.[2])

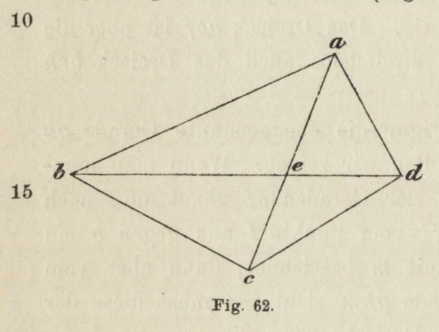


Fig. 62.

20 22. *At si lineam de totius lineae db subtriplam non invenies, sed eam plus minusve ipsius tertia parte continere cognoveris,* totam *bd* lineam in tria dividens aequa (Fig. 63), puncto *f* impresso vocabis, eritque *bf* pars eius tertia. Eiusdem *bf* proportionem ad lineam *be* diligenter inquirens, et secundum eamdem proportionem ex linea *bc* sumens puncto *g* signabis, 25 eritque proportio lineae *bg* ad lineam *bc* sicut proportio *bf* ad *be*. Dehinc si divisionis *ag* lineam ab *a* ad *g* produxeris, tertiam totius quadrilateri partem segregabis, quae est triangulus *abg*. Superficies autem *agcd* almuncharif reliquas duas tertias continebit. Quam si in duo aequa diviseris, erit totum quadrilaterum *abcd* in tria aequa divisum, ut haec figura 30 repraesentat.

Ad huius nempe divisionis demonstrationem si tres lineas *fg*, *fe*, *fc* protraxeris, triangulum *afb* totius | trianguli *bda* tertiam partem continere 31′ cognosces, triangulum ⟨insuper⟩ *bcf* triangulo *bcd* subtriplum fore non dubitabis. Duo igitur trianguli *afb*, *bcf* in unum collecti tertiam totius 35 quadrilateri *abcd* partem continebunt. Hi autem duo trianguli triangulo *abg* sunt aequales, eo quod triangulus *fgc* unius aequus est triangulo *agf*

6 potes. — 21—22 in tria] tertiam. — 23 Eiusdem *bf*] Idem *bf* erit. — 25 *bc* ad *be*. — 29 in tria in tria *A*. — 33 insuper *in A über der Zeile ausradiert.*

1) Leonardo 136, 8. 2) Leonardo 139, 6 v. u.

den dritten Theil des ganzen Vierecks. Darauf theilt man das überbleibende Trapez *abdh* vom Eckpunkte *b* aus auf die Weise, die wir oben gezeigt haben, in zwei gleiche Stücke durch die Gerade *bg*, und es wird dadurch das Viereck *abcd* in drei gleiche Stücke getheilt werden, nämlich in die beiden Dreiecke *ach*, *agb* und ausserdem in das Trapezoid *bgdh*, wie die betreffende Figur (Fig. 61) zeigt.[1])

Den Beweis dieser Theilung verschweigen wir, da er leicht zu finden ist.

21. *Ist das Viereck kein Parallelogramm,* wie das nebengezeichnete Viereck *abcd* (Fig. 62), von welchem die eine Diagonale *ac* die andere Diagonale *bd* im Punkte *e* in ungleiche Abschnitte theilt, und es enthält dann die Strecke *de* die Hälfte der Strecke *eb*, wie in der Figur zu sehen ist, so umfasst das Dreieck *dca* den dritten Theil des ganzen Vierecks, das Dreieck *acb* aber nimmt für sich die beiden andern Drittel in Anspruch. Theilt man nun dieses letztere beliebig in zwei gleiche Stücke, wie wir das oben gelehrt haben, so wird dadurch das Viereck *abcd* in drei gleiche Theile zerschnitten.[2])

22. *Findet man aber die Gerade de nicht als den dritten Theil der Geraden db, sondern sieht man, dass sie mehr oder weniger als den dritten Theil enthält,* so theilt man die ganze Gerade *bd* in drei gleiche Abschnitte (Fig. 63). Der Endpunkt des ersten sei *f* genannt, dann ist also *bf* ihr dritter Theil. Sucht man nun das genaue Verhältnis von *bf* zu der Linie *be* und schneidet nach demselben Verhältnis von der Geraden *bc* ein Stück durch den Punkt *g* ab, so ist also das Verhältnis der Linie *bg* zur Linie *bc* gleich dem Verhältnis von *bf* zu *be*. Zieht man darauf die Theilungslinie *ag* von *a* nach *g*, so schneidet man dadurch den dritten Theil des ganzen Vierecks ab, nämlich das Dreieck *abg*. Das Trapezoid *agcd* enthält also die andern beiden Drittel. Theilt man es daher in zwei gleiche Stücke, so ist das ganze Viereck *abcd* in drei gleiche Theile getheilt, wie die Figur darstellt.

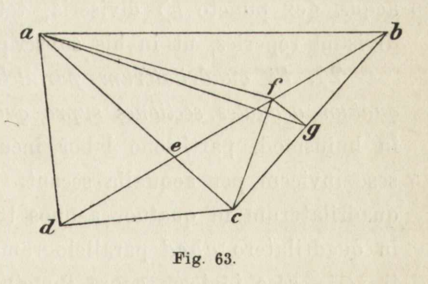
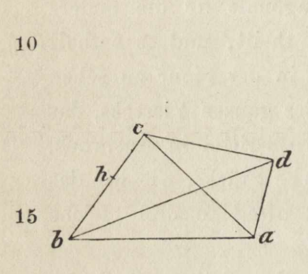


Fig. 63.

Zieht man nämlich zum Beweise dieser Theilung die drei geraden Linien *fg*, *fa*, *fc*, so sieht man, dass das Dreieck *afb* den dritten Theil des ganzen Dreiecks *hda* enthält, ausserdem dass das Dreieck *bcf* vom Dreiecke *bcd* der dritte Theil ist. Die beiden Dreiecke *afb*, *bcf* enthalten also zusammen den dritten Theil des Vierecks *abcd*. Diese beiden Dreiecke sind aber zusammen gleich dem Dreiecke *abg*, weil das Theildreieck *fgc* des einen gleich dem Theildreiecke *agf* des andern ist; sie liegen nämlich

alterius: sunt enim inter duas alternas lineas, scilicet quae sunt *fg*, *ac*, constituti. Triangulus igitur *abg*, qui duobus vel praedictis aequatur, totius quadrilateri *abcd* tertiam sibi partem nimirum recipiet. Superficiei itaque *agcd* almuncharif duae tertiae relinquuntur. Quam si in duo aequa utlibet secundum supra dictam doctrinam diviseris, totum praedictum quadrilaterum in tres aequales partes, ut supra diximus, incontanter abscindes.[1])

23. *Item si idem quadrilaterum in tres aequales partes a quolibet puncto cuiuslibet laterum impresso partiri volueris,* veluti si quadrilaterum *abcd* (Fig. 64) a puncto *h* eius lateri *cb* insignito in tria aequa secare desideras, ab ipsius angulo *a* cum linea *ac* vel *ag* tertiam eiusdem quadrilateri partem accipiens, reliquum, quod est triangulus *abc* vel superficies *agcd*, almuncharif, duas tertias continebit. Quare si hunc triangulum vel hanc superficiem in duo, ut supra docuimus, aequa ⟨ex puncto *h*⟩ diviseris, totum quadrilaterum *abcd* in tria aequa divisum reperies, ut in his subscriptis figuris ostenditur.[2])



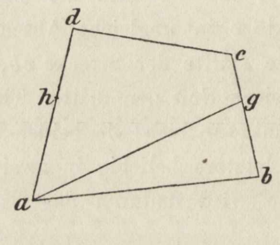


Fig. 64.

24. *Si quadrilaterum parallelogrammum fuerit, ⟨cuius embadum in quatuor aequales sectiones supra quolibet eius latere partiri volueris⟩,* nullus in huiusmodi partitione labor incumbit, eo quod ipsius utraque diametra sese invicem per aequalia secant. Duobus itaque diametris in eo protractis quadrilaterum in quatuor aequos triangulos abscindes. Ut si exempli causa in quadrilatero *abcd* parallelogrammo (Fig. 65) duo diametra *ad*, *bc* protraxeris, sese invicem supra punctum *e* et quadrilaterum insuper in quatuor aequos triangulos *abe*, *bde*, *cde*, *cae* secabunt, et haec est figura.

25. *Item si alterum duorum diametrorum, in duo aequa dividat alterum, ipsum autem ab eodem per inaequalia secatur,* ut in quadrilatero *abcd* (Fig. 66), cuius latus *ab* nequaquam lateri *cd*, sed lateri *bc* sibi contiguo, latus vero *cd* lateri *da* coaequatur, si diametrum *bd* protraxeris, totum quadrilaterum in duo dividet aequa. Alterum vero diametrum si protractum fuerit, illum non sic, sed per inaequalia secabit. In hoc itaque quadrilatero diametro *bd* tantum producto et supra punctum *e* in duo

3 superficies. — 7 cuilibet *A*. — 20 ex puncto *h fehlt*. — 22—23 cuius . . . volueris *in A auf dem Rande ausradiert.*

1) LEONARDO 140, 5. 2) LEONARDO 140, 11.

zwischen zwei parallelen Linien, nämlich *fg*, *ca*. Das Dreieck *abg*, das den beiden oben erwähnten Dreiecken gleich ist, enthält also den dritten Theil des Vierecks *abcd*. Für das Trapezoid *abcd* bleiben also zwei Drittel übrig. Theilt man dieses nach den oben gegebenen Anweisungen in zwei Hälften, so hat man damit das ganze vorgenannte Viereck in drei gleiche Theile zerschnitten, wie wir oben verlangten.[1])

23. *Wollte man ferner dasselbe Viereck in drei gleiche Stücke von einem beliebigen Punkte einer Seite aus theilen,* wenn man also z. B. das Viereck *abcd* (Fig. 64) vom Punkte *h* auf der Seite *cb* angenommen in drei gleiche Stücke zertheilen wollte, so würde man vom Eckpunkte *a* aus durch die Gerade *ac* oder *ag* den dritten Theil des Vierecks abschneiden. Dann enthält der Rest, nämlich das Dreieck *abc* oder das Trapezoid *agcd* zwei Drittel. Wenn man dann dieses Dreieck oder das Trapezoid vom Punkte *h* aus, wie wir oben gezeigt haben, hälftelt, so findet sich das ganze Viereck *abcd* in drei gleiche Theile zerschnitten, wie die beiden zugehörigen Figuren zeigen.[2])

24. *Ist das Viereck ein Parallelogramm, dessen Fläche man in vier gleiche Stücke über jeder Seite zu theilen beabsichtigt,* so macht diese Theilung keine Mühe, da die beiden Diagonalen einander halbieren. Zieht man also die beiden Diagonalen, so zerfällt das Viereck in vier gleiche Dreiecke. Wenn man z. B. in dem Parallelogramm *abcd* (Fig. 65) beide Diagonalen *ad*, *bc* zieht, so halbieren sie sich im Punkte *e* und zerschneiden ausserdem das Viereck in die vier gleichen Dreiecke *abe*, *bde*, *cde*, *cae*, und das ist die zugehörige Figur.

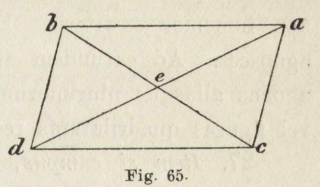


Fig. 65.

25. *Desgleichen, wenn eine Diagonale die andere halbiert, sie selbst aber von der letztern in ungleiche Abschnitte getheilt wird,* wie wenn man im Vierecke *abcd* (Fig. 66), dessen Seite *ab* nicht der Seite *cd*, sondern der ihr anliegenden *bc*, die Seite *cd* aber der Seite *da* gleich ist, die Diagonale *bd* zieht, so zerschneidet man das ganze Viereck in zwei gleiche Theile. Würde aber die andere Diagonale gezogen, so würde sie das Viereck nicht so, sondern in ungleiche Stücke theilen. Man zieht daher in solchem Vierecke nur die Diagonale *bd* und halbiert sie im Punkte *e*. Zieht man dann von dem Theilpunkte die Ge-

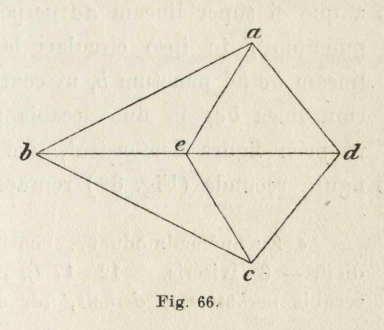


Fig. 66.

aequa diviso, si duas ab ipso puncto | lineas *ea*, *ec* ad duos angulos *a*, *c* protraxeris, quadrilaterum in quatuor aequa secabis, ut haec figura repraesentat.

26. *Quod si neutrum duorum diametrorum alterum per aequalia secaverit, quemadmodum in omnibus figuris almuncharif contingit,* illud quadrilaterum, ut in supradictis ostenditur, cum triangulo et superficie almuncharif in duo divideris aequalia, quibus seorsum in duo aequa divisis quatuor aequales quadrilateri portiones invenies. Ut si exempli causa superficies *abcd* almuncharif (Fig. 67) in triangulum *agd* et superficiem *abcg* almuncharif aequaliter dividatur, triangulum *agd* in duos aequos triangulos *ade*, *deg*, et superficiem etiam *abcg* in triangulum *afb* et superficiem *bfgc* almuncharif aequales abscidens praedictam superficiem in quatuor aequa, quae sunt tres trianguli *aed*, *def*, *afb* et superficies *fbcg* almuncharif nimirum secabis, ut haec figura declarat.

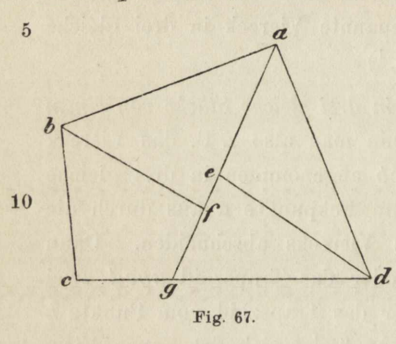


Fig. 67.

Hanc item figuram aliter partiri poteris, si praedictorum demonstrationum, quas in triangulorum et quadrilaterorum divisionibus ostendimus, non inmemor exstiteris. Et ita figurarum rectilinearum divisiones leviter agnosces. Ad earundem etiam figurarum similitudinem pentagonas et exagonas aliasque plurimorum angulorum figuras secabis, si eas in triangulos vel figuras quadrilateras resolveris.

27. *Item si campus, cuius unum latus circulare fuerit, reliqua vero latera rectarum linearum exstiterint, in divisione ponatur,* ut campus $a\widehat{bc}$ (Fig. 68), cuius duo latera *ab*, *bc* duabus rectis lineis repraesentantur, reliquum vero latus $\widehat{ac}$ circularis linea designat, vocaturque cata adeiret, id est sector circuli, si hunc, inquam, campum in duo aequa partiri volueris, rectam lineam *ac* protrahens eam supra punctum *e* in duo partiaris aequalia, a quo si super lineam *ac* perpendicularem *ef*, et ex altera ipsius parte ad punctum *f* in ipso circulari latere $\widehat{ac}$ impressum, ex altera vero parte lineam *be* ad punctum *b*, ut contingerit duxeris, praedictum circuli sectorem cum linea *bef* in duo secabis aequalia, sive in directum ipsa linea *bef*, ut prior figura demonstrat, sive non in directum, sed aliter producatur, ut figura secunda (Fig. 69) repraesentat.[1])

4 *Zu* quemadmodum ... contingit, *fügt B die Randglosse hinzu:* Hic falsum dicit. — 8 diviseris. — 12—17 *In A werden die Worte:* triangulum *agd* ... nimirum secabis *nochmals wiederholt, nur steht statt* secabis: dividitur. — 27 aderret *B*.

1) Leonardo 148, 13.

raden ea, ec nach den beiden Eckpunkten a, c, so theilt man dadurch das Viereck in vier gleiche Stücke, wie die Figur zeigt.

26. *Wenn aber keine der beiden Diagonalen die andere halbiert, wie in allen Trapezoiden der Fall ist,* so theile man das Viereck, wie oben gelehrt ist, durch ein Dreieck und ein Trapezoid in zwei gleiche Stücke. Durch Halbierung jedes einzelnen von ihnen findet man dann vier gleiche Theile des Vierecks. Ist z. B. das Trapezoid $abcd$ (Fig. 67) in das Dreieck agd und das Trapezoid $abcg$ gleich getheilt, so zerschneidet man das Dreieck agd in die beiden gleichen Dreiecke ade, deg, und ebenso das Trapezoid $abcg$ in die einander gleichen Stücke, das Dreieck afb und das Trapezoid $bfgc$, und hat dadurch das vorgenannte Trapezoid in vier gleiche Stücke getheilt, nämlich die drei Dreiecke aed, def, afb und das Trapezoid $fbeg$, wie die beigegebene Figur zeigt.

Dieselbe Figur könnte man auch auf andere Weise theilen, wenn man sich nur an die Beweise erinnert, die wir bei Theilung der Dreiecke und Vierecke gezeigt haben, und so wird man auch die Theilung der ⟨andern⟩ geradlinigen Figuren leicht auffinden. In ähnlicher Weise nämlich wie diese Figuren, wird man auch die Fünfecke, die Sechsecke und die andern vieleckigen Figuren theilen können, wenn man sie in Dreiecke oder Vierecke auflöst.

27. *Wird ferner ein Feld zur Theilung vorgelegt, dessen eine Seite ein Kreisbogen ist, die beiden andern Seiten aber gerade Linien darstellen,* wie z. B. das Feld $\overset{\frown}{abc}$ (Fig. 68), dessen beide Seiten ab, bc zwei gerade Linien darstellen, die übrige Seite aber ein Kreisbogen bildet, man nennt es aber *„Cata adeiret“,* das heisst Kreissektor, wenn man dieses Feld, sage ich, in zwei gleiche Theile zerschneiden will, so zieht man die gerade Linie ac und halbiert sie im Punkte e. Errichtet man nun auf der Geraden ac in diesem Punkte das

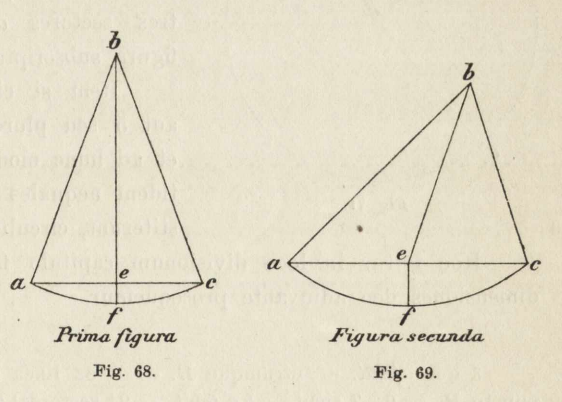


Fig. 68. Fig. 69.

Loth ef, dessen zweiter Endpunkt f auf dem Kreisbogen $\overset{\frown}{ac}$ liegt, und zieht nach der andern Seite, wie es gerade trifft, die Gerade eb nach dem Punkte b, so hat man den Kreissektor durch die Linie bef halbiert, mag nun die Linie bef eine Gerade sein, wie die erste Figur zeigt, oder keine Gerade, sondern anders gezogen sein, wie die zweite Figur (Fig. 69) darstellt.[1])

28. *Hanc autem eandem figuram aliter in duo secare poteris aequa.* Veluti si a puncto b (Fig. 70) usque ad punctum f lineam bf protraxeris, ⟨quae⟩ per lineam ac transiens eam supra punctum h utcumque secabit. Post haec proportionem lineae hc ad lineam ea diligenter inquirens et secundum eandem proportionem ex linea ba a puncto b sumens nota g impressa signabis. Erit igitur proportio bg ad ga ⟨sicut proportio hc ad ha⟩. His omnibus taliter insignitis, si a puncto f usque ad punctum g lineam fg rectam produxeris, circuli sectorem in duo aequa secabis, quae sunt sector $\overset{\frown}{fga}$ et superficies $\overset{\frown}{bgfc}$ almuncharif, ut in hac tertia figura depingitur.

Divisionis autem haec demonstratio est, quod, quia duo trianguli fge, bge inter duas aequidistantes bf, eg lineas constituti alter alteri sunt aequales, sector $\overset{\frown}{agf}$ triangulo abe et sectori $\overset{\frown}{afe}$ in unum collectis aequabitur. Amborum etenim summam primi sectoris $\overset{\frown}{abc}$ dimidium continere supra monstravimus: sector igitur $\overset{\frown}{agf}$ totius sectoris $\overset{\frown}{abc}$ dimidium continebit.[1])

27. *In circulorum nempe divisionibus, cum a centro dividuntur, nulla difficultas, quae sit explananda, reperitur.* Si ergo circulum $\overset{\frown}{abc}$ (Fig. 71) supra centrum d circumductum in tria partiri desideras, eius circumferentiam in tres aequales partes $\overset{\frown}{ab}$, $\overset{\frown}{bc}$, $\overset{\frown}{ca}$ partiaris. Igitur si ab eius centro d ad tria puncta a, b, c tres lineas da, db, dc protraxeris, eum in tres sectores $\overset{\frown}{dba}$, $\overset{\frown}{dca}$, $\overset{\frown}{dbc}$ secabis, ut figura subscripta demonstrat.[2])

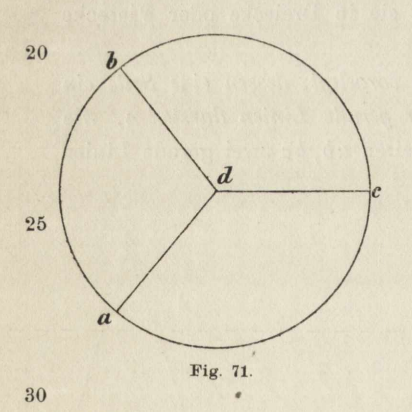


Fig. 71.

Item si circumferentem lineam in 4 aut 5 seu plures aequales diviseris partes, et ad hunc modum operare volueris, in totidem aequales partes, quot divisiones extiterunt, circulum secabis.

Hoc igitur in loco divisionum capitulo finem imponentes, corporum dimensiones deo adiuvante prosequemur.

---

3 quae *fehlt.* — utrumque *B.* — 5 ex linea ba a puncto] linearum baf a puncto *B.* — 6—7 sicut ... ha *fehlt.* — 24 sectores] asciscores *A.* — 27 aequalis. — 32 deo] $\overline{\chi p}$o.

28. *Diese selbe Figur kann man auch anders halbieren.* Zieht man nämlich vom Punkte b (Fig. 70) nach dem Punkte f die Gerade bf, die, weil sie die Gerade ac durchqueren muss, diese im Punkte h irgendwo schneiden wird, sucht darauf genau das Verhältnis der Geraden he zu der Geraden ea, und schneidet von der Geraden ba vom Punkte b aus nach demselben Verhältnisse eine Strecke ab, deren Endpunkt durch g bezeichnet werde, dann ist also das Verhältnis von bg zu ga gleich dem Verhältnis von he zu ha. Nachdem dies alles so bezeichnet ist, zieht man vom Punkte f nach dem Punkte g die Gerade fg und theilt dadurch den Kreissektor in zwei gleiche Stücke, nämlich den Sektor $\widehat{fga}$ und das Trapezoid $\widehat{bgfc}$, wie in der dritten Figur gezeichnet ist.

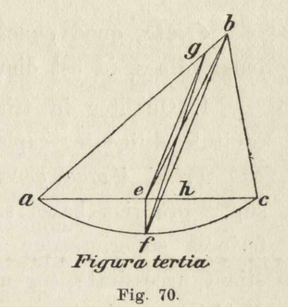


Fig. 70.

Der Beweis der Theilung ist folgender. Weil die beiden Dreiecke fge, bge, da sie zwischen den beiden Parallelen bf, eg liegen, einander gleich sind, so ist der Sektor $\widehat{agf}$ der Summe des Dreiecks abe und des Sektors $\widehat{afe}$ gleich. Diese Summe der beiden enthält aber, wie oben bewiesen ist, die Hälfte des Sektors $\widehat{abc}$, also ist auch der Sektor $\widehat{agf}$ gleich der Hälfte des Sektors $\widehat{abc}$.[1])

29. *Bei Theilung des ganzen Kreises, wenn die Theilung vom Mittelpunkte aus geschehen soll, findet man keine Schwierigkeit, die zu erläutern wäre.* Will man z. B. den Kreis $\widehat{abc}$ (Fig. 71), der um den Mittelpunkt d beschrieben ist, in drei gleiche Theile zerschneiden, so theilt man seinen Umfang in drei gleiche Bogen $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{ca}$. Zieht man nun vom Mittelpunkte d nach den drei Punkten a, b, c die drei Geraden da, db, dc, so theilt man ihn dadurch in die drei Sektoren $\widehat{dba}$, $\widehat{dca}$, $\widehat{dbc}$, wie die beigegebene Figur zeigt.[2])

Wenn man ähnlich den Umfang in vier oder fünf oder noch mehr gleiche Abschnitte theilt, und auf die angegebene Weise vorgeht, so zertheilt man dadurch den Kreis in ebensoviele gleiche Stücke, als Abschnitte des Umfangs vorhanden sind.

Indem wir an dieser Stelle dem Kapitel über die Theilungen ein Ende setzen, gehen wir mit Gottes Hilfe zur Ausmessung der Körper über.

---

1) Leonardo 148, 21. 2) Leonardo 145, 29.

Capitulum quartum in dimensionibus corporum secundum longitudinem, latitudinem et altitudinem.

⟨Nota, quod punctus nullam, linea unam, superficies duas, corpus tres longitudines, id est dimensiones, habere dicitur.⟩

1. Qualiter in tria genera corporum dimensiones dividuntur, hoc in capitulo diligenter explanabimus.

Primi itaque generis esse dicuntur omnia corpora, quorum termini super proprias bases secundum rectum angulum elevantur, et quorum inferiores superioresque superficies sunt ad invicem aequidistantes, quare etiam necessitate cogente sunt aequales. Haec autem in tres species subdividuntur. Sunt enim quaedam, quorum bases atque summitates quatuorque latera superficiebus quadrilateris designantur; quaedam autem sunt, quorum bases summitatesque triangulares vel pentagonae vel aliae multiangulae superficies ostendunt. Horum quidem omnes lineae rectae, latera vero sunt superficies quadrilaterae. | Sunt etiam et aliae, quorum bases atque summitates circulares superficies continent, totumque corpus teretem ad columnae similitudinem formam recipit. Omnium autem sub hoc genere contentorum altitudines per exteriores earundem superficies addiscuntur.[1])

2. *Secundi vero generis* sunt omnia corpora, quorum exteriores superficies supra proprias bases non secundum rectum, sed secundum acutum angulum eriguntur, et quorum insuper altitudines, quandoque ad idem punctum sese coartando conveniunt, quandoque, licet coartantur, non tamen ad idem punctum terminantur. Formae vero corporum ad idem punctum pervenientium secundum propriae basis formam alterantur, vocanturque *piramides erectae.* Cuiuscunque vero earundem basis quadrilatera fuerit, quadrangula, cuius autem triangularis, triangula, si circularis basis exstiterit, circularis piramis nuncupabitur. Illorum vero corporum, quae, licet coartantur, non tamen ad idem punctum terminantur, superiores superficies a suis basibus non nisi in quantitatibus discordant, minoris enim quantitatis existunt. Huiusmodi quippe formam observantes *curtae piramides* appellantur. Cunctorum autem corporum sub hoc secundo genere contentorum altitudines per suas exteriores superficies nequaquam addiscuntur. Eorum etenim altitudines sunt lineae, quae ab ipsorum summitatibus usque ad proprias bases secundum rectum angulum elevantur.[2])

3. Illa vero corpora sub *tertio genere* continentur, quae rotundam ex omni parte formam repraesentant, ut sphaerica corpora et similia sperarum, quae portiones eiusdem generis esse dicuntur.

3—4 Nota . . . dicitur *in A auf dem Rande ausradiert.* — 37 quos.

Viertes Kapitel. Die Ausmessung der Körper nach Länge, Breite und Höhe.

Man beachte, dass man sagt, der Punkt habe keine, die Linie eine, die Fläche zwei, der Körper drei Längen, das heisst Ausdehnungen.

1. Auf welche Weise bei der Ausmessung die Körper in drei Arten getheilt werden, wollen wir in diesem Kapitel genau auseinandersetzen.

Zur *ersten Art* werden alle Körper gerechnet, deren Grenzflächen auf ihren Grundflächen unter rechten Winkeln errichtet, und deren untere und obere Flächen einander parallel sind, die daher auch nothwendigerweise gleich sein müssen. Sie zerfallen aber in drei Unterarten. Einige sind nämlich darunter, deren Grund- und Deckflächen und die vier Seitenflächen von Vierecken gebildet werden; andere wieder, deren Grund- und Deckflächen dreieckig oder fünfeckig oder andere vieleckige Figuren zeigen; ihre Kanten sind sämtlich gerade Linien, die Seitenflächen aber viereckige Flächen. Es giebt auch noch andere, deren Grund- und Deckflächen Kreise bilden, und der ganze Körper eine gedrehte Form nach Art einer Säule erhält. Die Höhen aller Körper aber, die unter diese Art fallen, werden an ihren Aussenflächen gefunden.[1])

2. Zur *zweiten Art* gehören alle Körper, deren Aussenflächen nicht auf den Grundflächen unter rechtem, sondern unter spitzem Winkel aufstehen, und deren Kanten ausserdem bald sich verengend in demselben Punkte zusammentreffen, bald, obwohl sie sich verengern, doch nicht in demselben Punkte endigen. Die Gestalt der Körper, welche in demselben Punkte zusammenkommen, ist nach der jedesmaligen Gestalt der Grundfläche verschieden: sie heissen *gerade Pyramiden.* Diejenige, deren Grundfläche vierseitig ist, wird vierseitige, wenn sie dreiseitig ist, dreiseitige, wenn die Grundfläche kreisförmig ist, Kreispyramide genannt. Bei den Körpern aber, welche, obwohl sie sich ergänzen, doch nicht in einem Punkte endigen, unterscheiden sich die oberen Flächen von den Grundflächen nur in der Grösse, sie sind eben kleiner. Die diese Form beobachten, heissen *abgestumpfte Pyramiden.* Die Höhen sämtlicher Körper, welche unter diese zweite Art fallen, kann man vermittelst der Aussenflächen niemals finden. Ihre Höhen sind nämlich Gerade, die von ihren Spitzen auf die jedesmalige Grundfläche unter rechtem Winkel gefällt sind.[2])

3. Zur *dritten Art* werden aber diejenigen Körper gerechnet, die eine allseitig runde Gestalt besitzen, wie die kugelförmigen Körper und die kugelähnlichen, und die, welche Abschnitte dieser Art genannt werden.

---

1) Hierunter sind also alle geraden Prismen und Cylinder verstanden.

2) Das sind also Pyramiden und Kegel, sowie abgestumpfte Kegel und Pyramiden.

4. Primo itaque genere incipientes eiusdem figurarum diversitates ostendamus. Multas enim et diversas figuras amplectitur, quarum quidem prima est, cuius omnes longitudines, id est dimensiones, sunt quadrilaterae rectiangulae. Haec etiam in quamplures formas subdividitur. Quarum est,
5 cuius omnes dimensiones sunt ad invicem aequales, ut in corpore, cuius singulae dimensiones 10 ulnas continent, vocaturque *mucahab*, id est *calcaneum*. Haec autem embadi notia est, ut 10 in 10 multiplicatis 100 invenias, quod est duorum dimensionum, longitudinis scilicet et latitudinis, embadum. Post haec si 100 in 10, quae sunt altitudo, multiplicaveris,
10 1000 ulnas invenies, quod est area istius mucahab. Haec autem ulnae solidae sunt, quarum trium dimensionum, scilicet longitudinis, latitudinis et altitudinis, superficies sunt ulnae super ulnas quadratae. Omnes quidem ulnae, de quibus in corpore mentionem facimus, sunt ulnae super | ulnas 33′ in ulnae unius altitudine.[1])

15 5. Quod si non omnes huius figurae dimensiones, sed quaelibet duae sibimet aequales exstiterint, tertia vero maior vel minor remanserit, ut in corpore, cuius longitudo quatuor, latitudo similiter quatuor, altitudo vero 10 ulnas habuerit, quod *staris longum* nuncupatur, si longitudinem in latitudinem duxeris, 16 procreabuntur, quae si in altitudinem multiplicaveris,
20 160 nimirum invenies, quod est staris longi embadum.[2])

6. Item si istius figurae dimensiones inaequales apparuerint, ut in corpore, cuius longitudo 6, latitudo 7, altitudo autem 8 continet, si longitudinem in latitudinem multiplicaveris, et quod fuerit inde collectum, in altitudinem duxeris, 336 reperies, quod est huius corporis area.[3])

25 7. *Harum quidem figurarum diametrum* est linea ab uno angulo basis usque ad alium angulum sibi oppositum protracta, et ipsa est, quam in his figuris trianguli orthogonii ypotenusam dicimus, cuius alterum latus recto adiacens angulo corporis est altitudo, alterum autem latus est diametrum basis eiusdem corporis, ypotenusa vero diametrum totius corporis
30 existit. Quare diametrum in praenominata figura, quae mucahab nuncupatur, radix 300 esse dicitur, eo quod diametrum basis est radix 200, altitudinisque multiplicatio 100 efficit ulnas. Hae autem duae multiplicationes, altitudinis videlicet et diametri basis, in unum coadunatae, sunt diametri corporis multiplicatio, ideoque radicem 300 illud esse diximus. Ad
35 istius namque similitudinem omnium corporum diametrum investigare poteris.[4])

---

3 omnes id est longitudines dimensiones. — 18 stans longum *B*. — 20 stans longi *B*. — 30 Quare] Quod si.

---

1) Würfel: $V = a \cdot a \cdot a$. 2) Quadratischer Rechtecker $V = a \cdot a \cdot h$.
3) Rechtecker: $V = a \cdot b \cdot h$.

4. Indem wir mit der ersten Art beginnen, werden wir zunächst die Verschiedenheit der Gestalten zeigen. Sie enthält nämlich vielerlei verschiedene Formen. Die erste ist diejenige, deren sämtliche Längen, das ist Ausdehnungen, rechtwinklige Vierecke sind. Sie zerfallen wieder in sehr vielfache Gestalten. Zu ihnen gehört die, deren sämtliche Längen einander gleich sind, wie der Körper, dessen einzelne Ausdehnungen je 10 Ellen enthalten: er heisst *Mucahab,* das ist *Würfel.* Für ihn ist die Regel zur Bestimmung des Volumens, dass man 10 mit 10 vervielfachend 100 findet, und das ist der Flächeninhalt zweier Ausdehnungen, nämlich der Länge und der Breite. Multipliciert man dann 100 mit 10, nämlich der Höhe, so findet man 1000, das ist der Körperinhalt jenes Mucahab. Diese Ellen sind aber Körperellen, bei denen die Flächen der drei Ausdehnungen, nämlich der Länge, Breite und Höhe, Quadratellen sind. Alle Ellen nämlich, deren wir uns bei den Körpern bedienen werden, sind Elle mal Elle mal einer Elle Höhe.[1])

5. Wenn nicht sämtliche Ausdehnungen dieser Form, sondern nur zwei unter sich gleich sind, die dritte aber grösser oder kleiner übrig bleibt, wie für den Körper, dessen Länge 4, die Breite ebenfalls 4, die Höhe aber 10 Ellen besitzt, und der *Staris longum* genannt wird, und man die Länge mit der Breite multipliciert, so kommen 16, und diese mit der Höhe multipliciert ergeben 160, das ist der Körperinhalt des *Staris longum.*[2])

6. Finden wir die drei Ausdehnungen dieser Figur ungleich, wie bei dem Körper, dessen Länge 6, die Breite 7, die Höhe aber 8 Ellen enthält, und man multipliciert die Länge mit der Höhe und das Produkt mit der Breite, so findet man 336, und das ist das Volumen dieses Körpers.[3])

7. *Für diese Figuren ist die ⟨Körper-⟩ Diagonale* eine Gerade, die von einem Eckpunkte der Grundfläche nach dem ihr gegenüberliegenden Eckpunkte ⟨der Deckfläche⟩ gezogen ist, es ist das diejenige Gerade, welche wir in diesen Figuren die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks nennen, dessen eine dem rechten Winkel anliegende Seite die Höhe des Körpers, die andere aber die Diagonale der Grundfläche dieses Körpers ist; die Hypotenuse ist dann die Körperdiagonale.

In der obigen Mucahab genannten Figur ist also die Körperdiagonale gleich $\sqrt{300}$, weil die Diagonale der Grundfläche $\sqrt{200}$ ist, und das Quadrat der Höhe 100 Quadratellen beträgt. Beide Quadrate, das der Höhe und das der Flächendiagonale zusammenaddiert geben das Quadrat der Körperdiagonale, und deshalb sagten wir, sie betrage $\sqrt{300}$. Auf ähnliche Weise kann man die Körperdiagonale aller solcher Körper finden.[4])

---

4) Körperdiagonale $d = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$; Flächendiagonale $d_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$.

8. Harum quoque figurarum, de quibus nunc mentionem fecimus, bases et summitates sunt quadrilaterae rectiangulae. *Quod si figurae quadrilaterae, sed non rectiangulae fuerint,* ut rhumbus et rhumboides, figuraeque diversorum laterum, earum superficierum aream inquirens eam in altitudinis summam multiplica, et quod fuerit, erit corporis embadum.[1])

9. Item alterius figurae corpus sub hoc eodem genere continetur, ut corpus illud, cuius basis et summitas figura triangularis exstiterit et super tres quadrilateras superficies elevatum fuerit, quod *figura mansor,* id est *serrata,* nuncupatur, eo quod praecedentis, id est mucahab figurae, dimidium suscipit. Haec autem figura plures inde species secundum triangulorum diversitates subdividitur, earum tamen arearum notitia est eadem. Quarum scilicet arearum omnium similitudo est, ut figura mansor, cuius basis et summitas fuerit triangulus orthogonius, cuius unum latus 3, alterum 4, tertium vero 5 ulnas in se continet, altitudoque figurae 10 ulnas habuerit, triangulorum embadum, quod est 6, addiscens, illud in 10, quae sunt altitudo, multiplica, et | quod inde procreaverit, erit huius mansor area.[2])

10. Similiter si basis et summitas corporis superficies pentagonae vel exagonae fuerint, ⟨quod⟩ *pentagonum staris,* vel *exagonum staris* nuncupabitur, pentagoni igitur vel exagoni embadum addiscas, et quod fuerit, si in altitudinem duxeris, corporis aream invenies.

11. Si autem alterius figurae corpus sub hoc eodem genere contemtum fuerit, ita quod eius basis et summitas sint circulares superficies, totumque corpus circumrotationibus augmentetur, figurae huius aream, quemadmodum et aliarum figurarum areas sub praedicto modo cognosces, prius tamen ⟨circuli⟩ basis vel summitatis embado reperto. Nam si basis vel summitatis embadum in altitudinem duxeris, istius figurae, quae *rotunda columna* nuncupatur, aream invenies.[3])

12. *Manifestum est igitur, quod modus inveniendi areas omnium figurarum ⟨huius⟩ generis una est et eadem. Si enim basis vel summitatis cuiuslibet istarum figurarum embadum inveneris, et illud in altitudinis summam multiplicaveris, totius corporis aream reperies.* Nullam quippe, quantum ad hoc, in genere isto diversitatem invenies.[4])

---

5 summa. — 8 quadrilåterae *A*. — elevata *A*. — 19 quod *fehlt*. — stans *zweimal B*. — 25 figura. — 26 circuli *in A über der Zeile ausradiert*. — 30 huius *in A über der Zeile ausradiert*.

---

1) Allgemein $V = G \cdot h$.

2) Das dreiseitige Prisma hat also den speciellen Namen *serrata,* direkte Übersetzung von Prisma.

8. Die Grund- und Deckflächen derjenigen Figuren, welche wir bis jetzt erwähnten, sind Rechtecke. *Wenn nun diese Flächen zwar vierseitig, aber nicht rechtwinklig wären,* wie die Rhomben, die Rhomboide und die Figuren mit ungleichen Seiten, so suche man die Inhalte dieser Flächen und multipliciere sie mit der Höhe, das Ergebnis ist dann das Volumen des Körpers.[1])

9. Unter den Körpern dieser Art ist auch einer von anderer Gestalt enthalten, nämlich der Körper, dessen Grund- und Deckfläche eine dreieckige Gestalt hat, und der drei vierseitige Seitenflächen besitzt. Er wird *Mansor* genannt, das ist *der Gesägte* (Prisma), weil er die Hälfte des vorhergehenden Körpers ist, den wir Mucahab nannten. Diese Körperart wird in viele Unterarten nach der Verschiedenheit der Dreiecke getheilt, die Auffindung des Körperinhaltes aber ist ein und dieselbe. Als Beispiel für die Bestimmung des Volumens sei ein Mansor gegeben, dessen Grund- und Deckfläche je ein rechtwinkliges Dreieck ist, von dem eine Seite 3, die andere 4, die dritte 5 Ellen enthält, die Höhe des Körpers habe 10 Ellen. Man suche den Inhalt der Dreiecke, er ist 6, und multipliciere dies mit der Höhe 10, dann ist das Ergebnis das Volumen dieses Primas.[2])

10. Wenn die Grund- und Deckfläche des Körpers eine fünf- oder sechseckige Fläche wäre, man nennt ihn dann *fünfeckigen Staris* oder *sechseckigen Staris,* so sucht man entsprechend den Inhalt des Fünfecks oder des Sechsecks, und indem man das Ergebnis mit der Höhe multipliciert, erhält man das Volumen des Körpers.

11. Wenn aber der Körper von anderer Gestalt, der unter dieser Art enthalten ist, vorliegt, dessen Grund- und Deckfläche nämlich Kreise sind, und der ganze Körper durch Umdrehung entstanden ist, so findet man seinen Körperinhalt in vorgemeldeter Weise, nachdem man natürlich vorher den Flächeninhalt des Grund- oder des Deckkreises gefunden hat. Vervielfacht man nämlich den Flächeninhalt der Grund- oder der Deckfläche mit der Höhe, so findet man das Volumen dieses Körpers, der *Rundsäule* genannt wird.[3])

12. *Es ist also klar, dass die Methode, den Körperinhalt aller zu dieser Art gehörigen Körper zu bestimmen, eine und dieselbe ist. Hat man nämlich den Flächeninhalt der Grund- oder der Deckfläche irgend eines solchen Körpers gefunden, und multipliciert ihn mit der Länge der Höhe, so findet man das Volumen des Körpers.* Soweit es also diesen betrifft, findet sich bei dieser Art kein Unterschied.[4])

---

3) Cylinder: $V = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi h = G \cdot h.$

4) Der Inhalt für alle dergleichen Körper ist also allgemein $V = G \cdot h$.

13. Secundum vero genus ⟨in⟩ duas dividitur species, quarum altera est, a cuius basi corpus acui vel contrahi incipiens usque ad unum punctum ascendendo distenditur. Haec quidem species est plurium et diversarum, figurarum. Aut enim erit basis quadrilatera vel pentagona, vel exagona, seu aliarum quarumlibet superficierum, multotiens etiam erit et circularis. *Istarum nempe arearum notitia est una et eadem. Nam si basis embadum non ignoraveris, et illud in tertiam altitudinis partem multiplicaveris, totius piramidis aream addisces.*

Ad cuius similitudinem proponatur piramis, cuius basis quadrilatera in sui longitudine 4, in latitudine vero similiter 4 ulnas contineat, eiusque summitas ab uno puncto terminata 10 etiam ulnas in sua contineat altitudine. Notum igitur est, quod basis area 16 ulnas continet. Quas si in tertiam partem altitudinis, quae sunt tres et triens, multiplicaveris, 53 et trientem nimirum invenies, quod est huius piramidis area. Si enim 16, quae sunt basis embadum, in totam altitudinis lineam, quae sunt 10, duxeris, 160 procreabuntur, cuius summae pars tertia 53 et trientem efficit, quae sunt, ut diximus, istius piramidis embadum.

Huius quidem rei demonstratio in geometria declaratur. Illa enim manifestis demonstrationibus ostendit, quod in omni corpore, nisi sphaericum sit, tertia pars areae suae piramidis embadum complet.[1])

14. Ex hoc etiam comprehenditur, quod, *si harum piramidum basis trigona vel circularis fuerit,* eiusdem basis aream addiscens, eam in tertiam partem altitudinis multiplica, et quod fuerit, erit piramidis area. Et quia piramidum altitudines per exteriores superficies investigari nequeunt, quia earum altitudines sunt lineae, quae a summo capitum | usque ad bases 34′ secundum rectum angulum protrahuntur, qualiter has lineas addiscamus, elaborabimus.

15. Piramides igitur in quatuor partes dividuntur, quarum *prima* est, cuius basis latera sunt aequalia, vel basis est circularis, omnesque lineae, quae ab angulari basis vel arcuficiente linea basis ad extremum piramidis punctum diriguntur, sunt ad invicem aequales. *Secunda* vero est, cuius omnes lineae, quae a basi ad summum piramidis abstrahuntur, sibimet invicem aequantur, basis autem latera sunt inaequalia. *Tertia* quidem est, cuius basis omnia latera sunt aequalia, lineae vero, quae ab angulis usque

---

1 in *fehlt.* — 2 ad cuius basim corpus vel acui contrahi. — 5 sive *B.* — 12 pasis *A.* — 22 trigona . . . basis *in B doppelt.* — 24—25 quia earum] et ex. — 32 piramis.

---

1) Es ist also der Inhalt jeder Vollpyramide und jedes Vollkegels $V = \frac{1}{3} G \cdot h$. Für den Beweis bezieht er sich auf die Geometrie (Euklid's).

13. Die zweite Art wird in zwei Unterarten geschieden. Die erste ist diejenige, von deren Grundfläche an der Körper sich zu verjüngen anfängt, bis er zu einen Punkt aufsteigend in ihm zusammenläuft. Diese Unterart enthält viele verschiedene Formen. Entweder ist nämlich die Grundfläche viereckig, oder fünfeckig, oder sechseckig, oder irgend eine andersgestaltete Fläche; oftmals ist sie auch kreisförmig.

Die Bestimmung der körperlichen Inhalte ist bei diesen Körpern wieder eine und dieselbe. Denn wenn man den Inhalt der Grundfläche kennt, und ihn mit dem dritten Theile der Höhe multipliciert, so erhält man dadurch den Körperinhalt der ganzen Pyramide.

Es sei z. B. eine Pyramide vorgelegt, deren Grundfläche ein Quadrat ist, das in der Länge und ebenso in der Breite je 4 Ellen enthalte. Die Spitze, die von einem Punkte gebildet wird, habe eine Höhe von 10 Ellen. Nun ist bekannt, dass der Flächeninhalt der Grundfläche 16 Quadratellen enthält. Multipliciert man ihn mit dem dritten Theile der Höhe, das ist $3\frac{1}{3}$, so findet man $53\frac{1}{3}$, und das ist der körperliche Inhalt dieser Pyramide. Wenn man nämlich 16, den Inhalt der Grundfläche, mit der ganzen Höhe, das ist mit 10, vervielfacht, so entsteht 160, und dieser Summe dritter Theil giebt $53\frac{1}{3}$, die, wie schon gesagt, das Volumen der Pyramide ausmachen.

Der Beweis dieser Rechnung wird in der Geometrie (Euklid's) gegeben. Dort wird nämlich klar bewiesen, dass für jeden Körper, ausgenommen für die Kugel, der dritte Theil seines Körperinhaltes das Volumen seiner Pyramide ergiebt.[1])

14. Hieraus folgt weiter, dass man, *falls die Grundfläche solcher Pyramiden dreieckig oder kreisförmig ist,* nach Bestimmung des Inhaltes der Grundfläche, ihn mit dem dritten Theile der Höhe multiplicieren muss und das Ergebnis dann der Körperinhalt der Pyramide sein wird. Da aber die Höhe der Pyramiden durch die Aussenflächen nicht gefunden werden kann, weil die Höhe eine Gerade ist, welche von der Spitze auf die Grundfläche unter rechtem Winkel gezogen wird, so müssen wir zeigen, auf welche Weise wir diese Gerade bestimmen können.

15. Die Pyramiden werden in vier Arten getheilt. Bei *der ersten* sind die Seiten der Grundfläche gleich, oder sie ist ein Kreis, und alle Geraden, welche von den Eckpunkten oder der bogenförmigen Linie der Grundfläche nach dem äussersten Punkte der Pyramide gezogen werden, sind einander gleich. Bei *der zweiten* sind alle Geraden, welche von (den Eckpunkten) der Grundfläche nach der Spitze der Pyramide gezogen werden, einander gleich, aber die Seiten der Grundfläche sind ungleich. Bei *der dritten* sind zwar die Seiten der Grundfläche sämtlich einander gleich, aber die Geraden,

ad extremum punctum capitis distenduntur sunt inaequales. *Quarta* denique pars est, cuius nec basis latera, nec lineae, quae ab angulis ad summum capitis diriguntur, sunt ad invicem aequales. Tertia vero pars et quarta improprie piramides vocantur, eo quod supremum punctum ab
5 angulis basis non aequaliter ex omni parte distet, ideoque ipsarum altitudinum notitiam praetermittimus.[1])

16. *Si basis igitur primae partis circularis exstiterit,* multiplicationem medietatis diametri circuli ex multiplicatione illius lineae, quae a circumferenti linea basis usque ad extremum punctum piramidis dirigitur, deme,
10 residuique radicem inquirens piramidis altitudinem invenies.[2])

17. *Si autem piramidis basis triangularis aequilatera fuerit,* dimidium trium laterum in unum collectum addisce, et per illud trianguli embadum, quod est basis illius, partire, illiusque, quod exierit, multiplicationem ex multiplicatione illius lineae, quae a dimidio cuiuslibet lateris trianguli ad
15 supremum piramidis punctum protrahitur, minue, residuique radicem addiscens, quod fuerit, erit piramidis altitudo.

18. *Quod si basis piramidis fuerit quadratus, vel pentagonum aequilaterum et aequiangulum, seu aliarum figurarum, quae multilaterae nuncupantur, et quarum omnia latera et omnes anguli sunt ad invicem aequales,*
20 per dimidium omnium laterum in unum collectorum basis embadum partire, quodque exierit, in se ipsum multiplica, et quod fuerit, ex multiplicatione illius lineae in se ipsam, quae a dimidio cuiuslibet lateris eiusdem figurae usque ad extremum punctum piramidis protrahitur, deme, residuique radicem accipe, quia ipsa erit altitudo piramidis.[3])

25 **19.** *Item si basis piramidis quadrilatera vel pentagona seu quaelibet multilatera figura, aequilatera quidem, sed non aequiangula fuerit,* ad altitudinis notitiam per hanc regulam pervenire nullatenus poteris. Verum si illius instrumenti, per quod ex declivio montis inferior superficies eiusdem montis inquiritur, non immemor fueris, ad harum piramidum altitudinem
30 leviter et sine difficultate pervenies.

20. *In piramidibus autem secundae partis, quarum omnes lineae, quae*

---

13 partire illius. — 23 piramis. — 28 eius idem.

---

1) Diese vier Arten sind also:
1. Reguläre Pyramide und gerader Kegel;
2. Nichtreguläre Pyramiden, deren Grundfläche aber in einen Kreis beschrieben ist;
3. Reguläre schiefe Pyramiden und schiefer Kegel;
4. Irreguläre schiefe Pyramiden.

2) Höhe des Kegels: $h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$.

welche von den Eckpunkten der Grundfläche nach der Spitze gezogen werden, sind ungleich. Zur *vierten Art* endlich gehören diejenigen, für welche weder die Seiten der Grundfläche, noch die Geraden unter sich gleich sind, welche von den Eckpunkten nach der Spitze gezogen werden. Die dritte und vierte Art werden aber nur uneigentlich Pyramiden genannt, weil ihre Spitze von den Eckpunkten der Grundfläche nicht überall gleich weit absteht; wir unterlassen daher die Bestimmung ihrer Höhen.[1])

16. *Ist die Grundfläche der ersten Art ein Kreis,* so subtrahiert man das Quadrat des Halbmessers von dem Quadrate der Geraden, welche von einem Punkte des Umfangs nach der Spitze der Pyramide gezogen ist. Sucht man dann die Wurzel des Restes, so erhält man die Höhe der Pyramide.[2])

17. *Ist aber die Grundfläche der Pyramide ein gleichseitiges Dreieck,* so bestimme man die Hälfte der Summe der drei Seiten, und theile hierdurch den Inhalt des Dreiecks, das die Grundfläche der Pyramide bildet. Dann ziehe man das Quadrat des Ergebnisses von dem Quadrate der Linie ab, welche von der Mitte irgend einer Seite nach der Spitze der Pyramide gezogen werden kann, dann ist die Wurzel des Restes die Höhe der Pyramide.

18. *Ist die Grundfläche der Pyramide ein Quadrat oder ein gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfeck oder eine der übrigen Figuren, welche gleichwinklige und gleichseitige Vielecke genannt werden,* so theile man wieder durch die Hälfte der Seitensumme den Inhalt der Grundfläche und multipliciere den Quotienten mit sich selbst, subtrahiere dann dieses Quadrat von dem Quadrate derjenigen Geraden, welche man von der Mitte einer beliebigen Seite nach der Spitze der Pyramide ziehen kann, und bestimme von dem Reste die Wurzel: sie ist nämlich die Höhe der Pyramide.[3])

19. *Wenn ferner die Grundfläche der Pyramide ein Viereck oder ein Fünfeck oder ein beliebiges zwar gleichseitiges aber nicht gleichwinkliges Vieleck ist,* so kann man durch obige Methode niemals zur Kenntnis der Höhe gelangen. Wenn man sich aber jenes Instrumentes erinnert, vermittelst dessen wir aus dem Abhange eines Berges die Horizontalfläche des Berges gesucht haben, so kann man zur Kenntnis der Höhe solcher Pyramiden leicht und ohne Schwierigkeit gelangen.

20. *Bei den Pyramiden der zweiten Art aber, bei denen alle Geraden,*

---

3) Das Quadrat der Höhe einer regulären Pyramide findet er also, indem er von dem Quadrate derjenigen Seitenlinie, welche vom Halbierungspunkte je einer Seite der Grundfläche gezogen ist, das Quadrat des Radius des eingeschriebenen Kreises abzieht. Dass der Radius gemeint ist, folgt aus Kap. II pars 5 Nr. 1.

ab earundem basibus ad supremum punctum piramidum protrahuntur, sibi | *invicem sunt aequales, basis vero latera sunt inaequalia,* illo eodem in- 35 strumento, per quod ex declivio montis inferior eiusdem superficies inquiritur, egemus. *Harum nempe piramidum bases si quadrilaterae recti-* 5 *angulae fuerint, et earum altitudines nosse volueris,* ex multiplicatione illius lineae quae ab angulo basis ad summum piramidis protrahitur, multiplicationem medietatis diametri basis deme, et radicem residui accipe, quodque exierit ⟨erit⟩ illius altitudo piramidis.[1])

21. Eiusdem autem secundi generis *secunda species* est, cuius piramides. 10 cum sunt curtae, usque ad summitatis punctum non perveniunt.

Huius autem speciei modus in metiendo a modo primam istius eiusdem generis metiendi speciem nullatenus differt. Ad cuius similitudinem figura caput abscissa subintelligatur (Fig. 72), cuius quadrata basis 6 in unoquoque latere, caput vero similiter quadra- 15 tum 4 in singulis lateribus, eius etiam altitudo 10 ulnas contineat. Hunc itaque figuram perficies et usque ad unum summitatis punctum reduces, si, quemadmodum in se- 20 cundo istius libri capitulo deperfectione figurarum caput abscissarum, quousque ad unum punctum redigantur, ostendimus, operabis. Et ut hoc levius ostendatur, sit exempli 25 causa figura caput abscissa $abcd$, cuius caput linea cd 4, eiusdemque basis linea ab 6, altitudo vero cathetus ef 10 existat ulnarum. Si ergo caput ed in totam altitudi- 30 nem ef duxeris, 40 provenient, quae si in duo, quod est id, in quo basis ab caput dc superat, diviseris, 20 nascentur, et haec ⟨est⟩ lineae et ad perfectionem piramidis ad unum supremum punctum reducendae longitudo deficiens. Triangulus igitur abt piramidem magnam, triangulus vero cdt piramidem parvam constituet. Basis autem maioris piramidis abt est senarii in senarium 35 multiplicatio, altitudo vero 30, embadum quoque 360 continet ulnas. Basis etiam minoris piramidis cdt est multiplicatio quaternarii in quaternarium, altitudo autem 20, embadum vero 106 et duas insuper tertias amplectitur. Quare si embadum minoris ex embado maioris piramidis abstuleris, 253 et

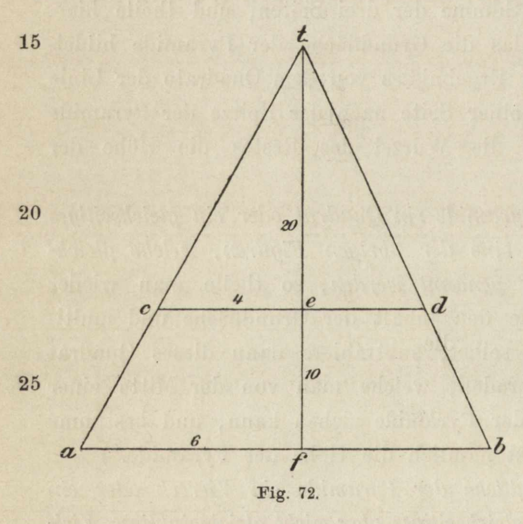


Fig. 72.

---

8 erit *in A über der Zeile ausradiert.* — 28 excitat *A.* — 31 est *fehlt.* — 34 minoris *A.*

welche von den Eckpunkten der Grundfläche nach der Spitze der Pyramide gezogen sind, einander gleich, die Seiten der Grundfläche aber ungleich sind, verfährt man ebenfalls mit demselben Instrumente, vermittelst dessen aus dem Abhange eines Berges dessen Horizontalebene gefunden wurde. *Bei den Pyramiden aber, deren Grundflächen Rechtecke sind, und deren Höhe man bestimmen will,* subtrahiere man von dem Quadrate der Geraden, welche vom Eckpunkte nach der Spitze gezogen ist, das Quadrat der halben Diagonale der Grundfläche und nehme vom Reste die Wurzel: das Ergebnis wird die Höhe der Pyramide sein.[1])

21. Von der zweiten Körperart aber umfasst *die zweite Unterart* die Pyramiden, welche, weil sie abgestumpft sind, nicht bis zu einer Spitze gelangen.

Die Methode der Ausmessung einer solchen weicht jedoch von der Art der Ausmessung der ersten Unterart durchaus nicht ab. Hierzu werde eine Figur mit abgeschnittenem Kopfe angenommen (Fig. 72), deren quadratförmige Grundfläche 6 Ellen in jeder Seite, der ebenfalls quadratförmige Kopf aber in den einzelnen Seiten 4 Ellen, ihre Höhe 10 Ellen enthält. Diese Figur vervollständige man und vollende sie bis zur Spitze, indem man so vorgeht, wie wir im zweiten Kapitel dieses Buches bei der Vervollständigung der Trapeze, bis sie in einem Punkte zusammenkommen, gezeigt haben. Damit dies aber leichter eingesehen werden kann, sei die Figur mit abgeschnittenem Kopfe etwa $abcd$, deren Kopf, die Gerade cd, 4, die Grundlinie, die Gerade ab, 6, die Höhe aber, das Loth ef, 10 Ellen lang ist. Multipliciert man also den Kopf cd mit der ganzen Höhe ef, so kommt 40, und dividiert man das durch 2, das ist durch den Überschuss der Grundlinie ab über den Kopf cd, so entsteht 20, und das ist die Länge der Geraden et, welche zur Vollendung der Pyramide bis zur Spitze (der Höhe) hinzuzufügen ist. Das Dreieck abt bildet also eine grosse Pyramide, das Dreieck cdt aber eine kleine Pyramide. Die Grundfläche der grössern Pyramide ist das Produkt von 6 mal 6, ihre Höhe aber 30, der Körperinhalt enthält 360 Ellen. Die Grundfläche der kleinern Pyramide cdt ist in ähnlicher Weise das Produkt von 4 mal 4, ihre Höhe 20, das Volumen aber umfasst $106\frac{2}{3}$. Subtrahiert man nun das Volumen der kleinern Pyramide von dem der grössern, so bleibt $253\frac{1}{3}$

1) In allen andern Fällen muss man sich also des oben S. 122/123 angegebenen Instrumentes zur Auffindung der Höhe bedienen, worauf er oben schon hingedeutet hatte.

unius tertia remanebit, quod est embadum huius figurae caput abscissae quaesitum, ut in supra scripta figura ⟨repraesentatur⟩.

22. *Item si huius figurae caput abscissae basis et summitas circularis fuerit,* ut in piramide caput abscissa, cuius circularis basis diametrum 4, 5 eiusdemque similiter circularis summitatis diametrum 2, altitudo vero 12 in se continet ulnas, ad istius igitur areae cognitionem si multiplicationem quaternarii in quaternarium, quod est 16, multiplicationem binarii in binarium, et sunt 4, nec non et multiplicationem binarii in quaternarium, quae sunt 8, diligenter inquisieris, | ⟨summam⟩ 28 reperies. Et quibus si septi- 35′ 10 mam septimaeque partis dimidium depresseris 22 remanebunt. Quae si in tertiam altitudinis partem, et sunt 4, duxeris 88 nimirum invenies, quod huius est caput abscissae area.[1])

Hac itaque via omnium figurarum caput abscissarum areas invenies.

23. *Contingit etiam, quod et eadem figura, quae caput abcissa dicitur,* 15 *quandoque duas sectas summitates, unam ex una, alteram ex altera parte suscipiat, in sua vero medietate maiorem et grassiorem contineat amplitudinem,* et tunc non unius erit corporis, sed duae figurae caput abscissae ad hoc efficiendum coniunguntur. Istarum itaque duarum figurarum areas, sicut supra diximus, separatim addiscas, ut postmodum totum simul ad- 20 discas.[2])

24. Sub vero *tertio genere* sphaerica corpora et sphaerarum fractiones continentur.

Igitur si sphaerae diametrum in se ipsum duxeris, et quod fuerit in tres et septimam multiplicaveris, embadum superficiei sphaerae cognosces. 25 *Quod si in sui diametri sextam partem duxeris, embadum totius sphaeralis corporis invenies.*[3])

Quemadmodum si in sphaera, cuius diametrum est 7, diametrum in se ipsum multiplicaveris, 49 reperies. Quae si in tria et septimam duxeris, 154 apparebunt, quod est superficiei sphaerae dimensio. Quam si in 30 sextam diametri partem, quod est unum et sexta, duxeris, 179 et duas tertias provenire non dubitabis, et hoc est totius sphaeralis corporis area.

25. *Hac etiam numeratione sphaericarum fractionum areas investigare poteris,* ut in fonte, cuius interior pars sit rotunda et os circulare, amplitudoque ipsius 7, profunditas vero 3 et unius medietatem contineat. Si

---

2 subscripta *B.* — repraesentatur *habe ich hinzugefügt.* — 4 piramide] columna. — abscissa] inscissa. — 9 summam *fehlt.* — 34 medietatis.

---

1) Unter Benutzung der oben bei Berechnung der *Figura caput abscissae* gegebenen Anleitung die Ergänzungshöhe des Trapezes zu finden, berechnet hier

und das ist der gesuchte Körperinhalt unserer abgestumpften Pyramide, wie in der oben gezeichneten Figur zu sehen ist.

22. *Ist ferner in der abgestumpften Pyramide die Grund- sowie die Deckfläche je ein Kreis,* wie in der abgestumpften Pyramide, für welche der Durchmesser der kreisförmigen Grundfläche 4, und gleichzeitig der Durchmesser der ebenfalls kreisförmigen Deckfläche 2, die Höhe aber 12 Ellen enthält, so sucht man, um zur Bestimmung ihres Volumens zu gelangen, das Quadrat von 4, das ist 16, ferner das Quadrat von 2, es ist 4, und auch das Produkt von 2 und 4, das ist 8, und findet als ihre Summe 28. Nimmt man hiervon $\frac{3}{14}$ weg, so bleiben 22. Multipliciert man dieses mit dem dritten Theile der Höhe, das ist mit 4, so findet man endlich 88, und das ist der Körperinhalt unserer abgestumpften Pyramide.[1])

Auf solche Weise findet man die Volumina aller abgestumpften Pyramiden.

23. *Es kommt auch vor, dass ein solcher Körper, der abgestumpfte Pyramide genannt wird, manchmal zwei abgeschnittene Deckflächen, eine auf der einen Seite, die andere auf der andern, in seiner Mitte aber eine grössere und stärkere Ausdehnung besitzt.* Dann gehört er nicht zu einem Körper, sondern es sind zwei abgestumpfte Pyramiden, um ihn zu bilden, verbunden. Hier wird man die Körperinhalte der beiden Körper einzeln aufsuchen, wie wir es oben gelehrt haben, damit man nachher das ganze Volumen finden kann.[2])

24. Zu der *dritten Körperart* gehören aber die Kugeln und die Kugelabschnitte.

Wenn man den Durchmesser der Kugel mit sich selbst vervielfacht und das Quadrat mit $3\frac{1}{7}$ multipliciert, so erhält man die Oberfläche der Kugel. Multipliciert man diese mit dem sechsten Theile ihres Durchmessers, so findet man den Körperinhalt der ganzen Kugel.

Quadriert man z. B. in einer Kugel, deren Durchmesser 7 ist, diesen Durchmesser, so erhält man 49. Multipliciert dies mit $3\frac{1}{7}$, so erscheinen 154, und das ist die Grösse der Oberfläche der Kugel. Multipliciert man das mit dem sechsten Theile des Durchmessers, das ist mit $1\frac{1}{6}$, so findet man zweifellos $179\frac{1}{3}$, und das ist das Volumen der ganzen Kugel.

25. *Vermittelst derselben Rechenmethode kann man auch den Körperinhalt der Kugelabschnitte bestimmen,* wie z. B. den eines Brunnens, dessen Innenraum gewölbt ist, und die Öffnung ein Kreis, dessen Weite 7 sei, die

---

Savasorda den Inhalt der abgestumpften Pyramide oder des Kegelstumpfes als Differenz zwischen dem Voll- und dem Ergänzungskörper.

2) Hier handelt es sich offenbar um abgestumpfte Doppelkegel.

3) Kugeloberfläche: $O = d^2\pi$; Volumen: $V = O \cdot \frac{1}{6}d = \frac{1}{6}d^3\pi$.

ergo ipsius profunditatem in eiusdem oris amplitudinem, quod est sphaerae diametrum, multiplicaveris, et quod fuerit, in tria et septimam, sicut in sphaera docuimus, duxeris, 77 invenies, quod est superficiei fontis embadum. Quam scilicet superficiem si in sextam diametri partem duxeris, 90 minus sexta reperies, quod est embadum fontis, qui sphaerae dimidium existit.[1])

26. *Si fontis item profunditas dimidio amplitudinis minor exstiterit, fontem illum minus dimidio sphaerae continere non dubites,* quemadmodum in circulorum fractionibus ostendimus. Cuius rei similitudo est fons rotunda, in cuius profunditate duae habentur ulnae, in oris autem amplitudine radix de 40, quod est 6 et fere tertia, continetur. Manifestum est, itaque, quod in hoc fonte dimidium sphaerae nullatenus reperitur. Verumtamen si sphaerae diametrum protraxeris, illud 7 ulnarum fore cognosces, quapropter, si duo, quae sunt fontis profunditas, in 7, quod est sphaerae diametrum, multiplicaveris, 14 efficies. Quae si in tria et septimam duxeris, 44 invenies, quod est embadum super|ficiei fontis. Si hoc igitur in sextam dia- 36 metri partem multiplicaveris, 51 et tertiam reperies, et hoc est totius fontis embadum.

27. *Item si fontis profunditas 5, amplitudo autem radix de 40 fuerit, totius sphaerae diametrum 7 continebit.* Si igitur profunditatem in diametrum duxeris, 35 nascentur, quae si in tria et septimam multiplicaveris, 110 invenies, quae sunt superficiei fontis embadum. Quod si in sextam diametri partem duxeris, 126 et unius tertiam complebis, quod est fontis area.[2])

Manifestum est igitur, qualiter sphaerarum et earundem fractionum areas, et veraciter, invenire possumus, quare dimensiones corporum, quae sub tribus generibus comprehenduntur, velut in istius capituli principio promisimus, diligenter explanavimus, et ita quartum capitulum deo adiuvante perficimus.

---

1. His ita peractis, qualiter ad metiendi modum levius pervenies, indicabimus. Magnus enim labor est, ita, ut praediximus, operari. Quapropter quoddam instrumentum, quo laboris modus evacuatur, ostendamus.[3])

---

7 minus minus *A*. — 9 horis *A*. — 19 totius totius *A*. — 27 deo] χ̃po. — 29 paratis *A*.

---

1) Halbkugel: $O = \frac{d^2}{2}\pi$; $V = O \cdot \frac{1}{6} d = \frac{d^3}{12}\pi$.

2) Kugelkappe: $O = d \cdot h \cdot \pi$; $V = \frac{1}{6} d^2 h \cdot \pi$.

3) Im Nachfolgenden giebt Savasorda praktische feldmesserische Regeln unter Benutzung zweier Instrumente, welche sonst, und auch von Leonardo in

Tiefe desselben aber enthalte $3\frac{1}{2}$. Multipliciert man nun die Tiefe mit der Weite der Öffnung, welche den Durchmesser der Kugel bildet, und vervielfacht das Produkt mit $3\frac{1}{7}$, wie wir für die Kugel gelehrt haben, so findet man 77, und das ist der Inhalt der Oberfläche des Brunnens. Multipliciert man nun diese Oberfläche mit dem sechsten Theile des Durchmessers, so findet man 90 weniger $\frac{1}{6}$, und das ist der Körperinhalt des Brunnens, der die Hälfte der Kugel beträgt.[1])

26. *Ist die Tiefe des Brunnens kleiner als die Hälfte der Weite, so ist ohne Zweifel der Brunnen weniger als die Halbkugel,* wie wir bei den Kreisabschnitten gezeigt haben. Als ein Beispiel dazu sei ein kreisrunder Brunnen vorgelegt, in dessen Tiefe 2 Ellen enthalten seien, die Weite der Öffnung aber sei $\sqrt{40}$, welche 6 und nahezu $\frac{1}{3}$ enthält. Es ist also klar, dass dieser Brunnen keineswegs die Hälfte der Kugel enthält. Wenn man aber den Durchmesser der Kugel bestimmt, so sieht man, dass er von 7 Ellen Länge ist. Multipliciert man daher 2, das ist die Tiefe des Brunnens, mit 7, dem Durchmesser der Kugel, so macht das 14, und durch Multiplikation mit $3\frac{1}{7}$ findet man 44, und das ist der Betrag der Oberfläche des Brunnens. Multipliciert man dann diesen mit dem sechsten Theile des Durchmessers, so findet man $51\frac{1}{3}$, und das ist der Körperinhalt des ganzen Brunnens.

27. *Ist ferner die Tiefe des Brunnens 5, die Weite der Öffnung aber $\sqrt{40}$, so enthält der Durchmesser der Kugel 7.* Multipliciert man nun die Tiefe mit dem Durchmesser, so entstehen 35, und diese mit $3\frac{1}{7}$ vervielfacht geben 110, den Inhalt der Oberfläche des Brunnens. Multiplikation mit dem sechsten Theile des Durchmessers ergiebt $128\frac{1}{3}$, das ist den Körperinhalt des Brunnens.[2])

Es ist also klar, wie man das Volumen der Kugel und der Kugeltheile genau zu finden imstande ist. Wir haben damit die Ausmessung der Körper, welche unter den drei Arten enthalten sind, vollständig dargelegt, wie wir im Anfange dieses Kapitels versprochen haben, und haben so das vierte Kapitel mit Gottes Hilfe zu Ende geführt.

---

1. Nachdem dies geschehen ist, wollen wir zeigen, wie man zu einer leichtern Ausmessungsmethode gelangen kann. Es ist nämlich mit vieler Mühe verknüpft, so vorzugehen, wie wir oben gesagt haben. Wir werden deshalb ein Instrument beschreiben, durch welches die Arbeit vereinfacht wird.[3])

---

seiner Distinctio VII., zur Höhenmessung verwendet wurden. Dass damals solche Regeln in Übung waren, ist wohl kaum einem Zweifel unterworfen.

2. *Si triangulum itaque campum ad modum subscriptae formae abc* (Fig. 73) *formatum metiri volueris,* eius quodlibet unum latus, et sit latus bc, diligenter metire: ipsum sit eiusdem trianguli basis. Post haec duas arundines accipiens, quarum altera super alteram secundum rectum angulum elevetur, vel, si volueris, quoddam quadrilaterum rectiangulum assumens, rectum angulum cuilibet puncto basis superpone, sitque punctus ille punctus d lateris bc. Quo facto mensurandi lineam in arundinis seu lateris praedicti basis directo, quousque ad alterutrum trianguli latus perveniat, protrahe. Quae si forte ad angulum trianguli pervenerit, ut linea da in hac subscripta figura, eam trianguli perpendicularem esse non dubites. Cuius quantitatem diligenter inquirens, ipsam in basis dimidium multiplica, et quod fuerit, erit trianguli embadum, nec aliarum summas investigare te tunc oportebit.

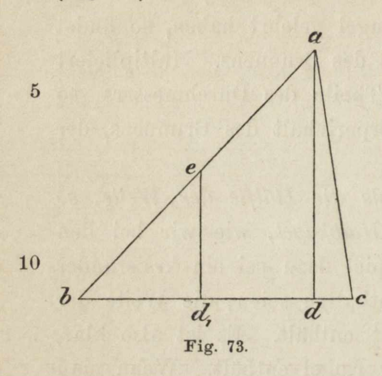


Fig. 73.

3. *Quod si mensurandi linea nequaquam ad angulum trianguli, sed ad alterutrum trigoni latus provenerit,* ut linea d_1e in hac eadem figura, sitque punctus e super lineam ab, erit proportio be ad ab sicut proportio lineae d_1e ad lineam ad, eo quod duo trianguli adb, bd_1e similes existunt. Ex hac itaque proportione summam perpendicularis ad non ignorare poteris. Hoc idem etiam facies, si mensurandi linea ad alterum latus ac perveniret. Isto igitur instrumento omnes triangulares campos metiri poteris, ita quod eorum omnium laterum summam investigare supervacaneum iudicabis.

4. *Item si campus quatuor rectis lateribus terminatur, praedictum quadrilaterum rectangulum supra quemlibet unum angulum eiusdem campi coapta,* et si mensurandi lineam in directo lineae quadrilateri rectilinei et super campum in latus protendi cognoveris, rectum angulum eum fore non dubitabis. | Idem in secundo tertioque angulo faciens, si eos tres rectos inveneris, illum campum quadrilaterum rectiangulum affirmabis, et tunc duorum laterum uni angulo adiacentium summas inquirens, alteram in alteram multiplica, et quod fuerit, erit eiusdem quadrilateri embadum. Nec summarum aliarum laterum cognitionem, cum hoc feceris, egebis, et haec est huius rei prima figura $abcd$ (Fig. 74). 36′

5. *Quod si campus duos tantum rectos angulos et super unum latus*

11 vasis *A.* — 12 proveniat. — 16—17 investigari *A.* — 28 et si] et sit *A.* — linea.

2. *Will man also ein dreieckiges nach der nebenstehenden Gestalt abc* (Fig. 73) *gebildetes Feld ausmessen, so misst* man eine beliebige Seite desselben genau, es sei dies die Seite *bc*, sie werde als Grundlinie des Dreiecks genommen. Darauf nimmt man zwei Stangen, von denen die eine mit der andern unter rechtem Winkel verbunden ist, oder, wenn man will, irgend ein Rechteck, und legt den rechten Winkel auf irgend einen Punkt der Grundlinie auf. Es sei dies der Punkt *d* der Seite *bc*. Darauf verlängere man die messende Gerade in der Stange oder der Seite, welche auf vorgenannter Grundlinie errichtet ist, bis sie an eine der beiden andern Seiten des Dreiecks heranreicht. Gelangt sie zufällig an die Spitze des Dreiecks, wie die Gerade *da* in beigegebener Figur, so zweifele man nicht, in ihr die Höhe des Dreiecks zu haben. Ihre Länge messe man genau und multipliciere sie mit der Hälfte der Grundlinie, dann ist das Produkt der Inhalt des Dreiecks, und man braucht die Längen der andern Seiten nicht mehr zu suchen.

3. *Geht aber die messende Linie nicht durch die Spitze des Dreiecks, sondern kommt an eine Seite des Dreiecks heran,* wie die Gerade $d_1 e$ in der nämlichen Figur, und es sei der Punkt *e* auf der Geraden *ab*, dann ist das Verhältnis von *bc* zu *ab* gleich dem Verhältnis der Geraden $d_1 e$ zur Geraden *ad*, weil die beiden Dreiecke *adb*, $bd_1 e$ ähnlich sind. Aus dieser Proportion kann man die Länge der Höhe *ad* finden. Genau ebenso würde man vorgehen, wenn die messende Linie an die andere Seite *ac* heranreichte. Mit obigem Instrumente kann man also alle dreieckigen Felder ausmessen, so dass es überflüssig erscheinen dürfte, die Längen aller ihrer Seiten zu bestimmen.

4. *Ist weiter das Feld von vier geraden Seiten begrenzt, so lege man das oben beschriebene Rechteck auf irgend einen Winkel des Feldes.* Sieht man dann, dass die messende Linie auf der Rechteckseite auch auf der Seite des Feldes sich erstreckt, so muss der betreffende Winkel ein rechter sein. Verfährt man in derselben Weise in einer zweiten und einer dritten Ecke, und findet sie alle drei als rechte Winkel, so kann man behaupten, das das fragliche Viereck ein Rechteck ist. Dann sucht man die Länge zweier Seiten, welche einem Winkel anliegen, und multipliciert eine mit der andern, so wird das Produkt den Inhalt des Vierecks ergeben. Wenn man so vorgeht, braucht man also nicht auch die Länge der andern Seiten zu kennen. Hierzu gehört die erste Figur *abcd* (Fig. 74).

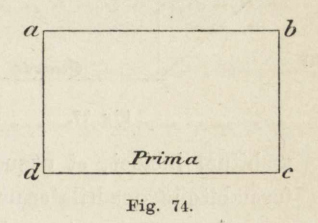


Fig. 74.

5. *Hat das Feld nur zwei rechte Winkel an derselben Seite,* wie in

habuerit, quemadmodum in hoc secundo quadrilatero *abcd* (Fig. 75) cuius duos angulos *c*, *d* super duos terminos lineae *cd* locatos rectos, reliquos

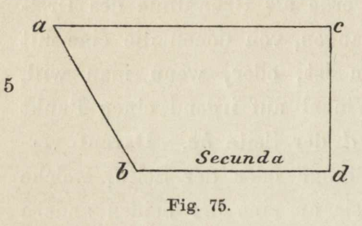


Fig. 75.

vero nequaquam rectos esse didicimus, eius latus *cd* metire, et, quod invenies, in lineae 5 *ca* dimidium, post hoc in dimidium lineae *db*, quae super duos rectos angulos eriguntur, multiplica, indeque collectum istius quadrilateri embadum fore iudicabis, nec te lateris *ab* quantitatem tunc oportebit addiscere.

10 6. *Si duo item anguli sibimet oppositi normales exstiterint,* ut in quadrilatero *abcd* (Fig. 76) tertio, cuius duo tantum anguli *c*, *b*, qui per diametrum sibimet invicem opponuntur, recti, reliqui vero *a*, *d* diversi eliciuntur (eorum etenim alter oxigonius, alter ampligonius iudicetur), ebetem, inquam, angulum, qui est *d*, sumens ei angulum praedicti quadrilateri rectianguli 15 superpone. Quo facto mensurandi lineam in directo eiusdem recti anguli protrahe, et manifestum est, eam intra campi aream, et non extra cadere, pervenietque ad lineam *ab*, et eam in duo secabit, eritque punctus sectionis punctus *e*. Nascetur igitur quadrilaterum *aced*, cuius duo recti anguli super idem latus *dc* constituentur, assimiliabiturque quadrilatero *abcd* 20 secundo, quapropter eius embadum, quemadmodum in ipso eadem secundo docuimus, inquires. Remanebit trigonus orthogonius *deb,* cuius embadum ex multiplicatione lineae *eb* in dimidium lineae *bd* dignosces, et haec est figura.

7. *At si campus unum tantum normalem angulum, reliquos vero diversos habuerit,* ut in quadrilatero *abcd* quarto (Fig. 77), cuius solus angulus *c*

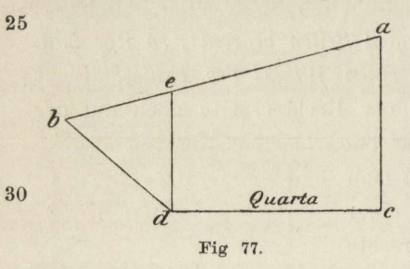


Fig 77.

25 est rectus, alii vero se ab invicem diversificantur. Cum enim impossibile sit, eos omnes acutos existere, erit eorum unus ebes, sitque in hoc quadrilatero ebes angulus punctus *d*. Ab hoc, inquam, ebete angulo *d*, 30 si quandam rectam ⟨lineam secundum rectum angulum, quemadmodum in tertia figura monstravimus⟩ protraxeris, infra quadrilateri ambitum incidet, et usque ad latus sibi oppositum, ut linea *de*, perveniet formabitque quadrilaterum *aecd*, cuius duo anguli super idem latus locati 35 normales nuncupantur. Huius itaque quadrilateri aream, sicut docuimus, investiga, remanebitque triangulus *deb* sicut in tertia figura, licet non orthogonius, cuius embadum, velut supra mon|stravimus, inquires et invenies, 37′ et haec est figura.

4 linea. — 30—32 lineam . . . monstravimus *in A auf dem Rande ausradiert.*

dem zweiten Viereck *abcd* (Fig. 75), und wissen wir, dass die beiden Winkel *c*, *d*, die an den beiden Endpunkten der Geraden *cd* liegen, rechte, die beiden andern aber keineswegs rechte sind, dann messe man die Seite *cd* und multipliciere das Gefundene mit der Hälfte der Seite *ca*, darauf mit der Hälfte der Seite *db*, die unter rechtem Winkel gezogen sind. Die Summe der Produkte wird dann der Inhalt des Vierecks sein, und man braucht also die Länge der Seite *ab* nicht zu suchen.

6. *Wenn ebenso zwei sich gegenüberliegende Winkel rechte sind,* wie im dritten Viereck *abcd* (Fig. 76), von dem nur die beiden Winkel *c*, *b*, die sich in der Diagonale gegenüberliegen, rechte sind, die beiden andern aber *a*, *d* als verschieden erfunden werden, denn der eine ist ein spitzer, der andere ein stumpfer, so nehme man den stumpfen Winkel, der *d* sei, und lege auf ihn den Winkel des genannten Rechtecks. Dann verlängere man die Messlinie des rechten Winkels direkt, und es ist klar, dass diese Verlängerung in die Fläche des Feldes und nicht ausserhalb fallen muss, und zur Geraden *ab* gelangen und sie in zwei Stücke schneiden wird. Der Theilpunkt sei der Punkt *e*. Es entsteht so das Viereck *aecd*, für welches zwei rechte Winkel an derselben Seite *dc* gebildet sind, und es gleicht dem zweiten Vierecke *abcd*. Man sucht also seinen Inhalt, wie wir für das zweite Viereck gelehrt haben. Es bleibt das rechtwinklige Dreieck *deb* übrig, dessen Inhalt man durch Multiplikation der Geraden *eb* mit der Hälfte der Geraden *bd* erkennt, und das ist die Figur.

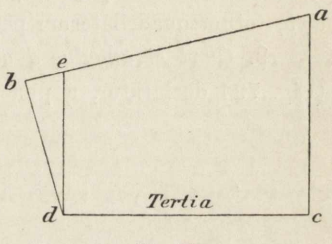


Fig. 76.

7. *Hat aber das Feld nur einen rechten Winkel, die übrigen aber ungleich,* wie im vierten Vierecke *abcd* (Fig. 77), von dem nur der Winkel *c* ein rechter ist, die drei andern aber unter sich verschieden, so muss, da es nämlich unmöglich ist, dass alle drei spitz sind, einer ein stumpfer sein, und es sei in diesem Vierecke der stumpfe Winkel am Punkte *d*. Wenn man, sage ich, von diesem stumpfen Winkel aus eine gerade Linie unter rechtem Winkel zieht, wie wir in der dritten Figur gezeigt haben, so wird sie innerhalb der Fläche des Vierecks fallen und bis zur Gegenseite, wie die Gerade *de*, gelangen. Sie bildet dann das Viereck *aecd*, von dem zwei Winkel an derselben Seite rechte genannt werden. Den Inhalt dieses Vierecks sucht man also so, wie wir es gelehrt haben, und es bleibt das Dreieck *deb* wie in der dritten Figur übrig, wenn auch kein rechtwinkliges. Seinen Inhalt sucht und findet man, wie wir oben gezeigt haben, und das ist die Figur.

8. *Item quadrilaterum etiam, in quo nullus rectus angulus habetur multiformiter describitur, et universaliter, qui sic describuntur, unum vel plures ebetes angulos continebunt.* Non est enim possibile, ut quadrilaterum constituatur, in quo rectus vel obtusus angulus non invenietur. Modus autem eorum
5 areas investigandi unus est et idem. Nam cum perpendiculari linea super ebetem scilicet angulum erecta areas invenies. Descripto itaque quadrilatero *abcd* (Fig. 78) quinto, ebes angulus *c* super lineam *cd* construatur, perpendicularis vero linea *ce* dirigatur, et si angulus *d*, qui super eandem *cd* lineam continetur, obtusus fuerit, aliam perpendicularem *df* supra punctum *d*
10 constituens in tres partes, quae sunt quadrilaterum *cfed*, et duo trianguli *ace*, *dfb*, totum quadrilaterum partieris, ut in subscripta quinta figura monstratur.

9. *Quod si angulus d obtusus non fuerit,* ut in sexto quadrilatero *abcd* (Fig. 79) declaratur, a puncto *d* versus punctum *c* recedens alium perpendicularem super linea *cd* a puncto *f*
15 usque ad punctum *b* vel ad alium punctum lineae *bd* producas, et si perpendicularis ad punctum *b*, sicut linea *fb* pervenitur, quadrilaterum in duos triangulos *ace*, *bfd* et unum quadri-
20 laterum *cbef*, velut supra, dividetur.

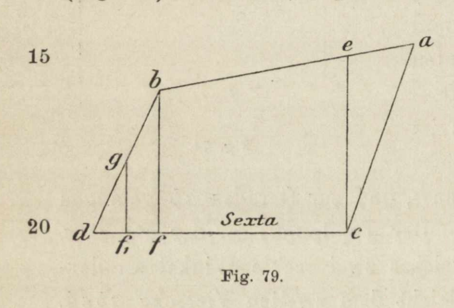


Fig. 79.

10. *At si perpendicularis ad punctum b nullatenus pervenire poterit,* ad alium lineae *bd* punctum, ut linea $f_1 g$ in hac eadem sexta figura, producetur, et manifestum est, quod proportio lineae *dg* ad lineam *db* est ut
25 proportio perpendicularis $g f_1$ ad perpendicularem *fb*. Hac itaque proportione perpendicularis *fb* summam veraciter investigare poteris, eo ⟨quod⟩ trium linearum *dg*, *db*, $f_1 g$, quantitas est nota. Hac igitur perpendiculari cognita quadrilaterum in tria, quemadmodum supra diximus dividetur. Et si duos perpendiculares sibimet invicem aequales inveneris, duas lineas *ab*,
30 *cd* subalternas esse non dubites. Post haec unam ex perpendicularibus in dimidium duorum laterum, quae sunt *ab*, *cd*, multiplica, et quod fuerit, erit totius quadrilateri embadum.

11. *Quod si duo perpendiculares, ut in quinto quadrilatero abcd, inaequales exstiterint,* dimidium utriusque perpendicularis *ce*, *bf* in totam
35 lineam *cd*, supra quam eriguntur, multiplica, indeque collectum erit quadrilateri *cebd* embadum. Demum duorum triangulorum *ace*, *bfd* areas inquire, et quod fuerit, embado quadrilateri *cefd* superadde, indeque coadunatum totius quinti quadrilateri *abcd* aream constituet.

5 investigandi investigandi *A*. — lineam. — 26 poterit. — quod *fehlt*.

8. *Ein Viereck, in welchem kein Winkel ein rechter ist, kann vielerlei Gestalten haben, und alle, die so gezeichnet werden, haben allgemein einen oder mehrere stumpfe Winkel.* Es ist nämlich nicht möglich, ein Viereck zu zeichnen, in dem kein rechter oder stumpfer Winkel vorhanden ist. Die Methode aber, deren Inhalt zu bestimmen, ist ein und dieselbe, denn man findet durch im stumpfen Winkel errichtete Senkrechte den Flächeninhalt. Hat man also das fünfte Viereck $abcd$ (Fig. 78) beschrieben, und sei der stumpfe Winkel c an der Seite cd konstruiert und die Senkrechte ce errichtet. Ist dann der Winkel d, welcher an derselben Seite cd liegt, auch stumpf, so wird durch Errichtung einer zweiten Senkrechten df im Punkte d das ganze Viereck in drei Theile zerschnitten, nämlich in das Viereck $cfed$ und die beiden Dreiecke ace, dfb, wie die beigegebene fünfte Figur zeigt.

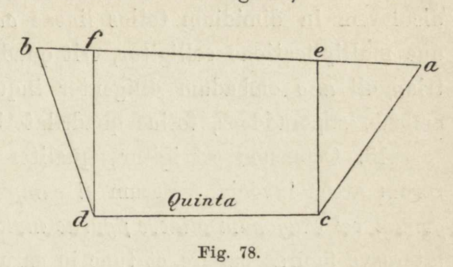


Fig. 78.

9. *Ist aber der Winkel d nicht stumpf,* wie im sechsten Vierecke $abcd$ (Fig. 79) gezeichnet ist, so errichtet man, indem man von d nach c zurückgeht, ein anderes Loth auf der Geraden cd im Punkte f bis zum Punkte b oder bis zu einem andern Punkte der Geraden bd. Erreicht das Loth den Punkt b, wie die Gerade fb, so ist das Viereck in die beiden Dreiecke ace, bfd und ein Viereck $cbef$ wie oben zerschnitten.

10. *Wenn aber das Loth nicht den Punkt b erreicht,* so führe man es bis zu einem andern Punkte der Geraden bd, wie die Gerade f_1g in der nämlichen sechsten Figur. Dann ist klar, dass das Verhältnis der Geraden dg zur Geraden db gleich dem Verhältnis des Lothes gf_1 zu dem Lothe fb ist. Durch diese Proportion kann man also die genaue Länge des Lothes fb bestimmen, weil die Grösse der drei Strecken dg, db, f_1g bekannt ist. Hat man diese Senkrechte gefunden, so ist dadurch das Viereck in drei Stücke wie oben getheilt. Findet man dabei die beiden Lothe einander gleich, so müssen die beiden Geraden ab, cd parallel sein. Dann multipliciert man eines der beiden Lothe mit der halben Summe der beiden Seiten ab, cd, und das Ergebnis ist der Inhalt des ganzen Vierecks.

11. *Sind aber die beiden Lothe, wie im fünften Viereck $abcd$, ungleich,* so multipliciere man die Hälfte jedes der beiden Lothe ce, bf mit der ganzen Länge cd, auf der sie errichtet sind, dann ist die Summe der Produkte der Inhalt des Vierecks $cebd$. Man suche darauf die Inhalte der beiden Dreiecke ace, fbd und addiere das Ergebnis zum Inhalte des Vierecks $cefd$, dann wird die Summe den Gesamtinhalt des fünften Vierecks $abcd$ darstellen.

12. *Item si duo perpendiculares in sexto, secundo scilicet quadrilatero,* | *quadrilatero abcd, similiter inaequales fuerint,* longiorem perpendicularem 37′ in dimidium lineae *cf* multiplica (Fig. 80). Quo facto breviorem perpendicularem in dimidium totius lineae *cd* item multiplica, quodque ex utra-
5 que multiplicatione colligitur, erit quadrilateri *ecbd* area. Post haec residui trianguli *aec* embadum diligenter inquire, et quod inveneris, quadrilateri embado superaddens, totius quadrilateri *abcd* aream invenies.

13. Ostensum est igitur, qualiter omnium triangulorum et quadrilaterorum areas invenies. Verum *si campus multilatera figura fuerit, ut penta-*
10 *gonum vel exagonum aliaeve figurae multiangulae,* eam in triangulares quadrilaterasve figuras partire, et tunc in earum arearum cognitione, quemadmodum ostendimus, operare. Quia vero circulares figurae earumque fractiones rarissime reperiuntur, qualiter ad ipsarum cognitionem perveniamus, reticendum censuimus. Illud tamen, quod in hoc eodem libro superius inde
15 monstravimus, satis sufficere ad hoc non dubitetur.

Finit liber embadorum a Savasorda *Iudaeo in ebraico compositus et a* Platone Tiburtino *in latinum sermonem translatus anno Arabum DX mense saphar, die XV eiusdem mensis, hora tertia, Sole in XX gradu et XV minuto Leonis, Luna in XII gradu et XX minuto Piscium, Saturno in VIII*
20 *gradu et LVII minuto Tauri, Iove in Arietis XXVI gradu et LII minuto, Marte in Libra XXVII. XV, Venere in Libra II. XXVIIII, Mercurio in Leone XIIII. XLV, Capite in Cancro O. I, Cauda in Capricorno O. I.*

---

4 item] iterum *B.* — 5 quadrilaterum *A.* — 7 superaddes. — 16 Finis. — 18 ora *A.* — 22 Cancro t. I. — Capricorno t. I. *Der Buchstaben* t *war im XII. Jahrhundert eine Form für die Null, besonders in astronomischen Tabellen, als Abkürzung von* teca, *einem der vielfachen Namen für Null. Der Abschreiber des XV. Jahrhundert wusste das nicht mehr und schrieb deshalb gedankenlos auch das* t *mit ab.*

12. *Wenn ebenso zweitens die beiden Lothe im sechsten Vierecke abcd ungleich sind,* so multipliciere man die längere Senkrechte mit der Hälfte der Geraden cf (Fig. 80), darauf vervielfache man auch das kleinere Loth mit der Hälfte der ganzen Geraden cd und die Summe beider Produkte ist dann der Inhalt des Vierecks $ecbd$. Dann suche man den Inhalt des Restdreiecks aec und addiere das Ergebnis zu dem Inhalte des Vierecks, so findet man den Gesamtinhalt des Vierecks $abcd$.

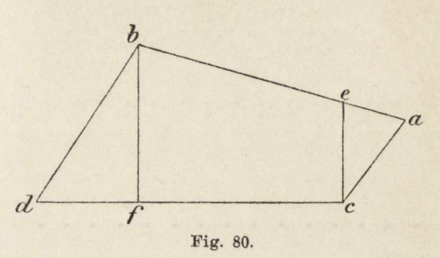


Fig. 80.

13. Hiermit ist gezeigt, wie man die Flächeninhalte aller Dreiecke oder Vierecke bestimmen kann. *Ist aber das Feld von vieleckiger Gestalt, etwa ein Fünfeck oder ein Sechseck oder ein anderes Vieleck,* so zerschneide man es in dreieckige oder viereckige Figuren und gehe dann mit ihrer Bestimmung vor, wie wir es oben gezeigt haben. Da man aber kreisförmige Felder oder dergleichen Abschnitte sehr selten findet, haben wir die Art, wie man zu ihrer Kenntnis gelangt, geglaubt verschweigen zu dürfen. Das aber, was wir in diesem Buche darüber weiter oben auseinandergesetzt haben, ist sicherlich dazu mehr als genügend.

Hier endet der Liber Embadorum, der von dem Juden SAVASORDA *in hebräischer Sprache verfasst und von* PLATO VON TIVOLI *in das Lateinische übertragen ist, im Jahre DX der Araber, am XV. Tage des Monats Saphar, um die dritte Stunde, während die Sonne in* $20^0 15'$ *des Löwen verweilte, der Mond in* $12^0 20'$ *der Fische, Saturn in* $8^0 57'$ *des Stiers, Jupiter in* $27^0 52'$ *des Widders, Mars in* $27^0 15'$ *der Waage, Venus in* $2^0 29'$ *der Waage, Merkur in* $14^0 45'$ *des Löwen, der Drachenkopf in* $0^0 1'$ *des Krebses, der Drachenschwanz in* $0^0 1'$ *des Steinbocks.*

II.

DER BRIEFWECHSEL REGIOMONTAN'S MIT GIOVANNI BIANCHINI, JACOB VON SPEIER UND CHRISTIAN RODER.

Der Briefwechsel Regiomontan's mit Giovanni Bianchini, Jacob von Speier und Christian Roder.

Einleitung.

Die nachfolgenden Briefe und dazugehörigen Rechnungen sind in einem Quarthefte enthalten, das die Stadtbibliothek zu Nürnberg aufbewahrt. Dasselbe hat die Bezeichnung: *Msc. Cent. V. No. 56c* und besteht aus 74 Blättern, welche unten mit rother Tinte von 1—74 bezeichnet sind. Eine frühere Paginierung, die, wie ich zeigen werde, von Regiomontan selbst herrührt, geht von 11—83, und beweist so, dass von dem ursprünglichen Bestande die ersten 10 Blätter verloren gegangen sind. Auf der Innenseite des vordern Umschlages ist von neuer Hand Folgendes geschrieben:

„Eigenhändige Briefe des Joh. Regiomontanus (auch Germanus genannt) und Antworten darauf. Nämlich

S. 11. Brief des Joh. Blanchini, Mathematikers in Ferrara, an Regiomontan.

S. 17. Brief des Regiomontan an Blanchini.

S. 41. Brief des Blanchini an Regiomontan.

S. 47. Brief des Regiomontan an Blanchini.

S. 59. Brief des Regiomontan an Jacob de Spira, Astronom des Grafen von Urbino.

S. 64. Antwort des Spira an Regiomontan.

S. 67. Brief des Regiomontan an Spira.

S. 76. Brief des Regiomontan an Christ. Roder, Mathem. in Erfurt.

Die ersten 10 Seiten fehlen.

St. 40 ist verbunden.“

Ebenso steht auf dem Rücken des Bandes:

„Regiomontani, Ioann. Blanchini et Iacobi Spirensis
Epistolae autographae.“

Der Band ist 22 cm hoch, $15\frac{1}{2}$ cm breit.

In der obigen Inhaltsangabe ist nicht aufgeführt, dass Blatt 19 bis 30 der obigen Bezifferung eine grosse Zahl Rechnungen, die Auflösungen der von Bianchini, Regiomontan und Jacob von Speier gestellten Aufgaben, enthält. Sie hat man offenbar als zu dem Briefe Regiomontan's an Bianchini, der Blatt 17 beginnt, gehörig angesehen. Es ist überhaupt die ganze Beschreibung irreleitend.

Der wirkliche Inhalt ist folgendermaassen vertheilt:

Blatt 11^{r}—15^{r}: Brief Bianchini's an Regiomontan d. d. *Ex Fossanova Sancti Gillii Die XXI° Novembris .1463.* — Antwort auf den in ihn eingehefteten folgenden Brief Regiomontan's.

Blatt 15^{v} und 16 sind leer.

Blatt 17^{r}—18^{v}: Brief Regiomontan's an Bianchini d. d. *Ex Sancto Georgio in Venetiis die XXVII. Julii anno LXIII°.*

Blatt 19^{r}—20^{v}: Rechnungen zu diesem Briefe gehörig.

Blatt 21^{r}—28^{v}, col. 2: Rechnungen zu den drei folgenden Briefen zwischen Regiomontan und Bianchini.

Blatt 28^{v}, col. 3 — 30^{v}: Rechnungen zu dem Briefwechsel mit Jacob von Speier.

Blatt 31—34 sind leer.

Blatt 35^{r}—40^{r}: Brief Regiomontan's an Bianchini. Ohne Datum.

Blatt 40^{v} ist leer.

Blatt 41^{r}—46^{v}: Brief Bianchini's an Regiomontan d. d. *Ex Ferraria die V^{to} februarii 1464 hora 3^{a} noctis* (Blatt 46^{r} leer, 46^{v} die Aufschrift des Briefes).

Blatt 47^{r}—59^{r}: Brief Regiomontan's an Bianchini ohne Datum, aber sicher aus 1464. Unmittelbar anschliessend.

Blatt 59^{r}—63^{r}: Brief Regiomontan's an Jacobus Spirensis d. d. *Ex Roma die 15 februarii anno 1465°.*

Blatt 64^{r}—67^{b}: Brief Jacob's von Speier an Regiomontan d. d. *Ex Urbino 6^{a} Aprilis 1465* (Blatt 67^{r} leer, auf 67^{b} nur die Adresse, das Siegel abgefallen).

Blatt 68^{r}—73^{r}: Brief Regiomontan's an Jacob von Speier *Apud Balneas Viterbienses die* (so!).

Blatt 73^{v}, 74 und 75 leer.

Blatt 76^{r}—82^{v}: Brief Regiomontan's an Christian Roder d. d. *Ex Nuremberga die 4 Iulii anno Christi 1471.*

Auf Blatt 83^{r} steht die Notiz: δὲ τόν χριςτανὸν ἐρφορδιαίον.

Die Handschrift REGIOMONTAN'S und JACOB'S VON SPEIER ist sehr leicht lesbar, dagegen befleissigt sich BIANCHINI einer sehr schlechten Schrift.

Der Briefwechsel ist schon einmal herausgegeben worden.

In dem Buche: CHRISTOPHORI THEOPHILI DE MURR *Memorabilia Bibliothecarum Publicarum Norimbergensium et Universitatis Altorfinae. Pars I. Cum VIII Tabulis Aeneis. Norimbergae*, *Sumptibus Iohannis Holschii. M.DCC.LXXXVI.* umfasst diese Ausgabe S. 74—205. Sie ist jedoch nicht vollständig. In den beiden ersten Briefen sind lange Abschnitte weggelassen. Ausserdem aber sind alle Rechnungen, welche REGIOMONTAN über seine Aufgaben und die seiner Korrespondenten geführt hat, nicht mit aufgenommen. DE MURR hat auch viele Abkürzungen nicht verstanden. So löst er $\widetilde{qn}$ = *quando* stets mit *quum* auf, einer Form dieses Wortes, die zu REGIOMONTAN'S Zeiten überhaupt nicht bekannt war. Ebenso heisst bei ihm $\widetilde{qm}$ = *quoniam* immer *quum*. *Scilicet* hat er fast immer, wo es als Kompendium geschrieben ist, mit *seu* wiedergegeben u. dgl. mehr.

In dem ersten Briefe BIANCHINI'S hat er die Orthographie dieses Mannes vollständig verändert. BIANCHINI schreibt in diesem stets nach italienischer Art mit verdoppeltem Konsonanten, also z. B. *subtilli* statt *subtili, ellapsis* für *elapsis,* selbst *Cardinallis* für *Cardinalis:* alle diese Eigenthümlichkeiten sind verwischt, und der Brief ist in der Orthographie des 18. Jahrhunderts abgedruckt worden. Wie oft durch falsche Lesung der Sinn der Worte unverständlich geworden ist, eine gestellte Aufgabe oft einen ganz andern Sinn erhält, als REGIOMONTAN es beabsichtigt hat, wird man bei einer Vergleichung unseres Textes mit dem DE MURR'S leicht finden. Seine Abweichungen von dem hier folgenden Wortlaute unter dem Texte anzugeben habe ich aber für überflüssig gehalten, da sie ja nur auf falscher Lesung der Originalhandschrift beruhen.

Die hier zum ersten Male veröffentlichten Originalrechnungen REGIOMONTAN'S dürften von hohem Interesse sein. Sie geben Beispiele zu seinen *libri quinque de Triangulis,* zeigen aber auch, dass er im vollen Besitze der Algebra gewesen ist.

Die Anordnung der Gleichungsauflösung ist dabei völlig modern und entbehrt selbst des Gleichheitszeichens nicht, für das er einen längern Horizontalstrich verwendet. Die Bezeichnungen für die Unbekannte und deren Quadrat sind ꝛc = *res* und ꝯ = *census,* die für *res* geht manchmal selbst in eine solche über, dass man sie für x halten könnte. Dass er auch das Restproblem, die Regel Ta-yen der Chinesen, vollständig beherrschte, sowie unbestimmte Gleichungen ersten Grades mit zwei und drei Unbekannten zu lösen verstand, ist ebenfalls aus dem Briefwechsel klar; ob er die unbestimmten Diophantischen Aufgaben zweiten Grades, welche er seinen

Korrespondenten stellt, mehr als durch Probieren lösen konnte, ist zweifelhaft, aber nicht ganz unmöglich. Auch unter den geometrischen und stereometrischen Aufgaben und denen aus der Mechanik sind manche höchst beachtenswerthe. Ich mache darunter nur aufmerksam auf die beiden Maximumaufgaben, die Aufgabe über die Entfernung der Mittelpunkte des ein- und umbeschriebenen Kreises eines Dreiecks, diejenige über die schiefe Ebene, vor allem aber auf die Behandlung der Aufgabe, in einen gegebenen Kreis ein Sehnenviereck einzubeschreiben, dessen Seiten in gegebener Proportion stehen. Ich habe an der betreffenden Stelle den Gedankengang REGIOMONTAN's klar zu legen gesucht.

Soweit es mir möglich war, habe ich durch Anmerkungen den Briefwechsel sowohl, als die uns aufbewahrten Rechnungen völlig zu erklären gesucht. Die Vergleiche der in den Rechnungen benutzten Sinus mit einer gedruckten Sinustafel des REGIOMONTAN ist mit der den *Tabulae directionum profectionumque* angehängten Tafel gemacht worden, derjenigen, welcher sich zu damaliger Zeit der Verfasser allein bedienen konnte.

GIOVANNI BIANCHINI war Hofastronom des Herzogs von Ferrara. Weder das Geburts- noch das Todesdatum ist bekannt. JACOB VON SPEIER war in ähnlicher Weise Hofastrolog des Fürsten von Urbino. Sonst ist über seine Lebensumstände überhaupt nichts bekannt. CHRISTIAN RODER endlich war Professor der Mathematik an der Universität Erfurt. Er stammte aus Hamburg und war in dem Jahre, in dem REGIOMONTAN an ihn sich wendete, Rektor dieser Hochschule. 1463 war er Dekan der Artistenfakultät: *Factum est A. 1463 Examen 80 Magistrorum sub Decano M. Christiano Roder de Hambork in Quadragesima* citiert DOPPELMAYR in seinem Werke über die Nürnbergischen Mathematiker und Künstler S. 6, Note hh nach der *Matricula sive Catalogo Universitatis Erfordiensis A. 1463.* Aus dem Briefe REGIOMONTAN's selbst geht hervor, dass RODER auch Die Amplonianische Büchersammlung zu verwalten hatte. Weitere Notizen über ihn besitze ich nicht.

In Bezug auf die Anordnung der Rechnungen bemerke ich schliesslich noch, dass die bei mir den Zahlen nebengeschriebenen Bedeutungen derselben bei REGIOMONTAN unter diese gesetzt sind, weil er die Quartseite in je vier Kolonnen getheilt hat, so dass neben denselben der Platz gemangelt hätte. Wenn ich z. B. habe drucken lassen:

$$\overline{23} \cdot 33'\,30'' \text{ arcus } hz; \quad 23\,881 \text{ sinus } hz,$$

so sind diese beiden Angaben ebenfalls nicht neben- sondern untereinander angeordnet. Ich glaubte der bessern Übersicht halber so verfahren zu sollen, wie ich es gethan habe. Dass auch die Multiplikationen und Divi-

sionen sowie die Wurzelausziehungen nicht, wie bei mir vielfach geschehen ist, nebeneinander sondern untereinander bei Regiomontan angeordnet sind, brauche ich wohl nicht erst zu sagen. Die algebraischen Rechnungen aber sind so angeordnet, wie ich sie habe abdrucken lassen.

Auch hier eine deutsche Übersetzung beizugeben, hielt ich für inoportun. Sie würde gegen die Frische und Originalität der Briefe selbst so sehr abstechen, dass sie den Eindruck derselben sehr abschwächen würde, ohne dass sie das Verständnis beträchtlich beeinflussen könnte.

I.

Regiomontan an Giovanni Bianchini.

17 (7)[a] | Ad Io. Blanchinum Ferrariensem.

Non mireris, vir optime, si tardius, quam oportuerit, tue interrogationi respondeam. Quid enim moram hanc peperit, prius paucis dabo, deinde vero problema tuum pulcrum et subtile solvere conabor. Magistro Christophoro[1]), virtutum tuarum clamatori et sedulo predicatori, forte uno die obviam venio Rome domum iturus. Is ubi me vidit, salutem optat et interrogationem tuam in cartula offert. Accipio eam ita, ut decuit, hilari animo digna cum reverentia, tanquam indicium tue erga me benivolentie atque fiducie; lego eam et polliceor me responsurum, tametsi ingentem pre se ferret difficultatem. Quis enim tam magistrali interrogato satisfaciet, nisi magnam astronomie partem transcurrat? Discedo igitur a Magistro Christoforo, et domum veniens mox rationibus astronomicis incumbo, ut nodum hunc tuum tam subtilem quam implicatum resolvam. Nihil gratia dei occurrit, quod antehac non decies aut amplius contrectaverim. Responsione itaque exacta reliquum erat, ut epistolam quoque ad te super hac re scriberem. Sed nocte superveniente prohibeor, nam et punctatio problematis tui admodum serotina erat. Die ergo sequenti de more dominum meum Reverendissimum[2]) ad palatium Pape cum carioris suis cappellanis comitor, cumque ibi, ut assolet, operirer, insperato dominus meus pronunciatur legatus ad Venetias. Arbitrabar igitur, cum ad Venetias eundum est cum domino meo, ad Ferrariam etiam me venturum, et non modo litteris, sed et ore tibi responsurum. Cupiebat preterea dominus meus Reverendissimus te, tantum philosophum, videre, nam antehac fama solum et testimonio meo creberrimo te cognovit. Sed in itinere rumor venit, pestem invasisse civitatem, quamobrem preterire decrevit dominus meus Reverendissimus.

---

1) Später von Bianchini als Christophorus Briscensis erwähnt, was doch wohl „*aus Brescia*“ heissen soll.

2) Gemeint ist Kardinal Bessarion, bei dem Regiomontan als Sekretär bedienstet war.

Igitur, etsi non e Roma neque in Ferraria, ex Venetiis tamen, que me nunc tenent, responsum accipias meum, quod si bene se habeat, iudicio tuo relinquetur. Nam in hisce rebus tibi cedere non modo non pudet, verum etiam glorie datur, tantum habere preceptorem. Erat autem interragotionis tue tenor ille.

17(7)[b] | Die V^{to} Aprilis 1463 nocte sequenti hora 2 minuto 25to horologii, dum quedam stella mihi ignota esset in linea meridiana, Ferrarie, cuius latitudo est gradus 44 minuta 45 secunda 4, longitudo vero ab occidente habitato gradus 32, accepi ipsius altitudinem ab orizonte, et ipsam inveni gr. 39 mi^{ta} 16: quero autem locum ipsius stelle in zodiaco tam per longitudinem quam per latitudinem ab ecliptica, nec non arcum diurnum ipsius, seu moram ipsius supra terram.

Respondendo sic procedo. Datus est mihi quintus dies Aprilis anni 1463[i] currentis cum ceteris ad hanc rem necessariis, ad cuius meridiem invenio motum Solis verum $0 \cdot \overline{24} \cdot 10' \cdot 8''$, declinationem eius septemtrionalem gradus 9 minuta 25 fere. Utor enim declinatione maxima Solis usitata $\overline{23} \cdot 33' \cdot 30''$, unde et propter latitudinem notam cocludo dimidium argumentum diei huius super diem equalem esse gradibus quidem equinoctialibus $\overline{9} \cdot 28'$, in tempore autem minuta 38 unius hore equalis. Tempus igitur semidiurnum est hore 6 minute 38. Cumque instans considerationis tue fuerit horis duabus minutis 25 horologii peractis, videlicet ab occasu, additis eis ad tempus semidiurnum colliguntur hore 9 minuta 3, et hoc tempore a meridie computato fuit consideratio tua. Est autem motus Solis verus in tanto tempore minuta 22 secunda 1, quare ad tempus considerationis verus motus Solis est $0 \cdot \overline{24} \cdot 32' \cdot 9''$. Ex loco itaque Solis et distantia eius a meridiano cognitis medium celum constat punctus videlicet et terminans gradus 6 et minuta 41 de Virgine. Stella igitur tua mediabat celum cum $\overline{6} \cdot 41'$ Virginis. Subtraho deinde $\overline{39} \cdot 16'$ altitudinis stelle meridiane ab altitudine equinoctialis, quam oportet esse propter tuam ypothesim $\overline{45} \cdot 14' \cdot 56''$; manet $\overline{5} \cdot 58' \cdot 56''$, et tanta est huius stelle declinatio meridionalis. Habito igitur principio mediatoris celi et declinatione huius stelle, videor esse perductus ad hoc problema: Dato puncto, in quo stella quevis celum mediat, declinatione quoque eius perspecta locum eius verum in ecliptica latitudinemque ab eadem et cetera perspicere. Quod quidem et pluribus quam talibus viis solvendi sit potestas, inpresentiarum tamen vestigiis Ptolemei clarissimi adherebo, per figuram sectoris videlicet, quicquid vincto opus est, enitendo.

18(8)[a] | Revera hic primum apparet interrogati tui profunda subtilitas. Nam quocumque pacto figuram aptaverim, quatuor dumtaxat quantitates note occurrant. Oportet autem frequenter, quemadmodum perfectissime novisti,

quinque earum notas haberi, si sextam suscitari voluerimus cognitam. Sed hoc non obstante auxilio venit mihi conclusio quedam Ptolemei in capitulo 12° dictionis prime, cuius hec est intentio. Si arcus quidam in duos secetur, fueritque proportio sinus unius arcus ad sinum alterius sectionum rogata, reliquumque partialis arcus datus, totus quoque arcus et inde ambe sectiones inde nascentur.1) Mallem profecto tibi ostendere figurationem et numeros, quos hac in re notatos habui, quam multa tamquam somnia litteris intimare. Ut igitur ad metam provehamur, ne longis ambagibus detinearis, ex datis numeris, quos supra rememoravi, et conclusis meis dico stellam quidem esse in gradibus 12 minutis 25 Virginis, latitudinem autem habere meredionalem g̃ 13 m̃ 59. Tandem quoque arcum diurnum ipsius g̃ 168 m̃ 4 reperio.

Videor itaque interrogato tuo satis respondisse. Nunc reliquum est, ut id examines. Examinabis autem multo facilius, quam ego responderim, quod si differentiam a vero offenderis in minuto uno aut duobus, sciet sagacitas tua, multitudine numerorum sese multiplicantium atque dividentium id accidere debuisse. Nam in divisionibus rarissime tollitur totus dividendus, unde et multiplicationes, si que fiunt per numeros quotientes, deficere aut abundare necesse est; sed et in arcubus per sinum et e converso reperiendis nonnumquam a vero receditur. Hec et alia non dubito in excusationem meam, si opus fuerit, accomodabis. Vellem brevius dixisse, si res ipsa sineret. Si quid igitur superfluum te offenderit, pro modestia tua equo animo laturum te supplico. Hoc postremum unum oro, ut quam citius poteris, litteras tuas desideratissimas ad me mittas ea cum lege, ut fama virtutum tuarum me comparabis predicatorem, atque ut materia ad me scribendi habeas propono tibi cum omni reverentia quedam problemata atque interrogata, ad que digneris aliquid respondere. Nihil autem eorum ab interrogatu tuo alienum est; omnia enim de stellis finis et earum passionibus sonant. Postea vero quam videbo litteras tuas, de aliis rebus novis atque predictis, quas fortasse vidisse olim iuvabit, disseremus.

18(8)[b] | 1. Est quedam stella in medietate zodiaci descendentis, videlicet qui est inter caput Cancri per Libram et caput Capricorni, cuius declinatio septemtrionalis est g̃r 35 mi^{ta} 17, latitudo autem septemtrionalis g̃r 20 minuta 49: quero locum eius verum in ecliptica, et cum quo puncto eius celum

1) Regiomontan dürfte die Übersetzung des Gherardo Cremonese benutzt haben. In der Ausgabe *Venetiis* Peter Lichtenstein *1515* steht der betreffende Satz auf Blatt 10^a, l. 6—13. In der Heiberg'schen Ausgabe steht er S. 73, 11 u. ff. Freilich kannte Regiomontan auch das griechische Original, das Peurbach und er ja auf Anregung Bessarions übersetzen sollten.

mediet. Suppono autem declinationem Solis maximam g̃ 23 mi^{ta} 30, quemadmodum nostro tempore per instrumenta deprehenditur.

2. Est quedam stella in g̃ 9 minutis 15 Leonis solita mediare celum cum g̃ 20 mi^{tis} 37 Virginis: quero, quanta sit eius latitudo et quanta declinatio. Facile.[1]

3. Dum irem Venetias hoc anno 1463 in loco, cuius latitudo g̃ 34 mi^{ta} 19, longitudo vero ab occidente habitato g̃ 33 mi^{ta} 48, notavi quandam stellam fixam in nocte, que sequitur diem 17^{m} Iulii, que quidem oriebatur hora tertia minutis 25 noctis, mediabat autem celum hora 7ma minuto 38: quero locum eius in ecliptica, punctum mediationis celi, item declinationem eius et latitudinem.

4. Dum essem in loco, cuius latitudo ignota mihi erat, die 13° Iulii hora tertia noctis, vidi quandam stellam, cuius altitudo ab orizonte erat 39 g̃r, distabat autem a meridiano versus orientem per spatium duarum horarum, itemque ab eodem meridiano per 37 g̃r circuli orizontis, quos vocant gradus azimuth: quero locum huius stelle et latitudinem regionis etc.

5. In Venetiis, quarum latitudinem pono nunc g̃r 45, longitudinem autem ab occidente g̃ 31 mi^{ta} 45, hora tertia mi^{to} 38° noctis, que sequitur diem nonum augusti de anno 1463°, notavi quandam stellam fixam, cuius declinationem septemtrionalem alias deprehendi g̃r 13 mi^{ta} 25, altitudinem autem eius supra orizontem in hac consideratione inveni g̃ 50 et mi^{ta} 19, et erat stella in parte orientali hemispherii: quero locum eius in ecliptica et punctum mediationis celi cum latitudine eius.[2]

Hec pro nunc sufficiant. Habeo enim multa alia de eisdem passionibus stellarum fixarum, que, si velis, posthàc transmittam, ne prime littere mee fastidium tibi pariant. Studeo namque quam minimum tibi molestus esse, maxime autem morem gerere atque laudi tue, que plurima habetur, locum dare. Hoc faxis, iterum atque iterum obsecro, tempestivas ad me scribe litteras, sic enim nuncio non parum conplacemur. Domino Magistro Petro Bono[3] commendatus humiliter esse velim. Vale feliciter mei memor.

Ex Sancto Georgio in Venetiis, die XXVII Iulii anno LXIIj°

Tuus in omnibus

Joannes Germanus, ℞^{mi} dn̄i

Cardinalis Niceni Legati familiaris.

---

1) Diese Bemerkung dürfte wohl in dem wirklich abgesendeten Briefe nicht gestanden haben.

2) In dem Konzepte ist diese Aufgabe nachträglich hinzugefügt und von Bianchini in der später abgedruckten Antwort nicht erwähnt, so dass sie bei der Reinschrift des Briefes wahrscheinlich unterdrückt wurde.

3) Gemeint ist Pietro Buono Avogario, der zu jener Zeit ebenfalls in Ferrara lebte. Vgl. Riccardi, *Bibl. Math. Italiana* I, 61—62.

Es findet sich vollständig durchgerechnet das Beispiel, welches Bianchini an Regiomontan sandte. Diese Rechnungen theile ich hier vollständig mit.

19 (9)[a], col. 1.

| Ioannes de Blanchinis querit:

Die quinto Aprilis 1463 nocte sequenti hora 2 minutis 25 horologii, dum quedam stella mihi ignota esset in linea meridiana Ferrarie, cuius latitudo est $\overline{44} \cdot 42' \cdot 4''$, longitudo vero ab occidente habitato gradus 32, accepi ipsius altitudinem ab orizonte, et ipsam inveni $\overline{39} \cdot 16'$: quero autem locum ipsius stelle in zodiaco tam per longitudinem quam per latitudinem ab ecliptica, nec non arcum diurnum ipsius seu moram ipsius supra terram.

$\overline{31} \cdot 30'$	longitudo Vienne
$32 \cdot 0$	longitudo Ferrarie
$0 \cdot 30$	differentia longitudinum
$\overline{19} \cdot 1' \cdot 14''$	
$29 \cdot 31 \cdot 19$	
$28 \cdot 42 \cdot 29$	
$4 \cdot 55 \cdot 42$	
$22 \cdot 10 \cdot 44$	media stella
$\overline{0} \cdot 37' \cdot 7''$	
$4 \cdot 38$	
$5 \cdot 44$	
$2 \cdot 16$	
$0 \cdot 49 \cdot 45$	aux stelle
$21 \cdot 20 \cdot 59$	ortus stelle
$\overline{1} \cdot 59' \cdot 41''$	
$1 \cdot 58 \cdot 52$	
$0 \cdot 49$	
$20 \cdot 52$	
17	pars proportionalis[1])
$1 \cdot 59 \cdot 24$	Ascensio stelle *a*
$0 \cdot 22 \cdot 10 \cdot 44$	
$0 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 8$	verus motus stelle ad 5[m] Aprilis

1) D. i. der 60. Theil von 20′52″.

$\overline{9} \cdot 21' \cdot 20''$
9 · 43 · 28
22 · 8
10 ·
3 · 41 pars proportionalis *a.*[1])
9 · 25 · 1 declinatio stelle septemtrionalis.

$\overline{44} \cdot 45' \cdot 4''$	latitudo regionis *dz*;	42242 sinus *dz*, } [2])	col. 2.
45 · 14 · 56	complementum latitud. *dg*;	42610 sinus *dg*,	
9 · 25 · 1	declinatio stelle septemtr. *th*;	9817 sinus *th*,	
80 · 34 · 59	complem. declinat. *hz*;	59191 sinus *hz* (Fig. 1).	

g —— *d* *d* —— *z* *gd · dz*
t —— *h* *h* —— *z* *th · hz*
g —— *e* *e* —— *t* *ge · et*

Fig. 1.

42242
9817
295694
42242
337936
380178
414689714

11
139
37191
311742 9
5629249 7
414669714 3
42610000 2
426111
4266
42

5
2467
33922
1484878
5192989
132211245
583920000
59191111
591999
5911
59

9732
60000
583920000

9
8
6
5

col. 3.

1) Der 60. Theil von 22′8″ × 10. 2) Es ist hier jedesmal $\frac{12 \cdot 4}{60} = 1$ gesetzt.

9865 sinus arcus *et*; $\overline{9} \cdot 28'$[1]) arcus *et*, et est dimidium augmentum diei huius ad diem equalem.

$6^{ho} \cdot 38^{ma}$ tempus semidiurnum.
2 · 25
9 · 3 tempus considerationis, ut proponit a meridie computandus.
0 · $\overline{0}$ · 2′ · 26″ motus stelle in hora.
9 · 3 ·
18 · 54
3 · 6
1
22 · 1 motus stelle verus in horis distantie a meridie.
0 · 24 · 10 · 8
22 · 1
0 · 24 · 32 · 9 verus motus stelle hora considerationis.
col. 4. | 112 · 12
113 · 8
30 Pars proportionalis *a*.
112 · 42 Ascensio recta stelle.
9 · 3
15 ·
135 · 45
248 · 27 Ascensio recta medii celi.
247 · 48′
248 · 27
248 · 45
6 · 41 ♍ medium celi

Stella igitur mediabat celum cum $\overline{6} \cdot 41'$ Virginis.

$\overline{45} \cdot 14' \cdot 56''$
39 · 16 ·
5 · 58 · 56 delinatio huius stelle, et est meridionalis
9 · 21 · 20
8 · 59 · 3
22 · 17
41 ·
13 · 40
1 · 22
14 pars proportionalis *s*.
15 · 16
9 · 6 · 4 declinatio puncti ecliptice, cum que stella ipsa celum mediat.

1) Nach Regiomontan's Tafel ist sie $9^0 28' = 9868$.

19(9)[b], col. 1.

| Sit ah medietas equinoctialis, bd medietas ecliptice, h polus mundi meridionalis, z polus ecliptice, o stella habens declinationem meridionalem oh (Fig. 2).

$hz \cdot za$		$az \cdot zh$
$ho \cdot ol$	conversim	$lo \cdot oh$
$lk \cdot ka$		$ak \cdot (kl) \cdot x$.

$ak \cdot kl$
$az \cdot zh$
$oh \cdot lo$

Sit ak ad x ut az ad zh; igitur ak ad kl componitur ex duabus, scilicet ak ad x, hoc est az ad zh, et x ad kl, hoc est oh ad lo.

Neuter autem arcuum ak et kl notus est, omnes tamen alii quatuor noti sunt. Multiplicabo igitur sinum az in sinum dh, et proveniat p; porro zh in lo, et proveniat s. Constat p ad s proportionem esse | sicut sinus ak ad sinum kl, cumque residuus arcus al sit notus, erit consequenter kl notus, et ideo totus arcus ak. Prolixa erit operatio.

col. 2.

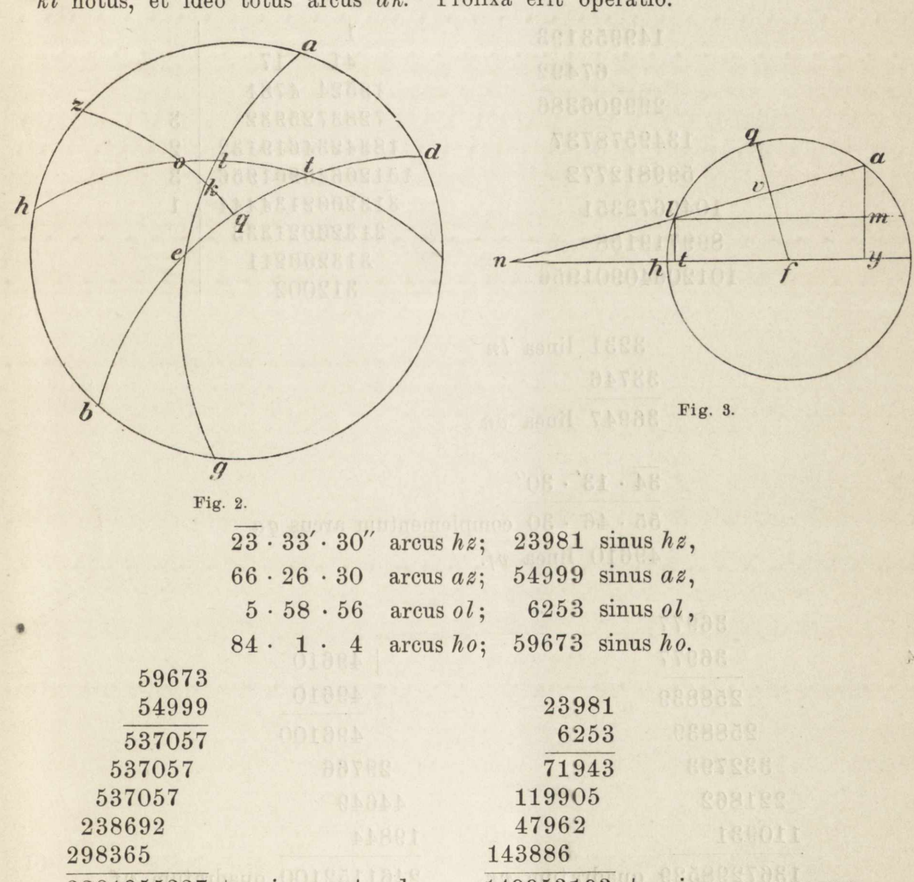


Fig. 2.

Fig. 3.

$\overline{23} \cdot 33' \cdot 30''$	arcus hz;	23981	sinus hz,
$66 \cdot 26 \cdot 30$	arcus az;	54999	sinus az,
$5 \cdot 58 \cdot 56$	arcus ol;	6253	sinus ol,
$84 \cdot 1 \cdot 4$	arcus ho;	59673	sinus ho.

```
    59673
    54999                        23981
   537057                         6253
  537057                         71943
 537057                         119905
 238692                          47962
298365                          143886
3281955327 terminus antecedens  149953193 terminus consequens.
 149953193
3132002134 differentia terminorum, et est linea am (Fig. 3).
```

$\overline{248}$ · 27′
180 ·
68 · 27 Arcus *al*

col. 2.

| 34 · 13 · 30 arcus *aq*

33746 sinus *aq*
33746
67492 corda *al*.

3132002134 · 149953193
67492 /

149953193
67492
299906386
1349578737
599812772
1049672351
899719158
10120640901956

1
41 17
19524 4781
7283725932 | 3
1834234619132 | 2
10120640901956 | 3
3132002134444 | 1
31320021333
313200211
312002

3231 linea *ln*
33746
36947 linea *vn*

$\overline{34}$ · 13′ · 30″
55 · 46 · 30 complementum arcus *qa*
49610 linea *vf*.

col. 4.

36977
36977
258839
258839
332793
221862
110931
1367298529 quadratum *vn*,
2461152100
3828450629 quadratum *fn*.

| 49610
49610
496100
29766
44649
19844
2461152100 quadratum *vf*.

1	
56	
2678	
38817	6
11126395	1
227818763	8
3828450629	7
1 2 2 6 4	4
1 2 3 7	
1 2 3	
1 2	

| 61874 linea *fn*.

20 (10)[a] col. 1.

$$\frac{61874 \cdot 36977}{60000}$$

36977
60000
2218620000

1	
3 3	
4 4	
548 9	
34335	3
572941	5
36243738	8
484554812	5
2218620000	7
618744444	
6187777	
61888	
611	
6	

35857 sinus arcus *kg*[1]); $\overline{36} \cdot 42'$ arcus *kg*,

34 · 13

2 · 29 arcus *kl*,

68 · 27

70 · 56 arcus *ak*,

19 · 4 arcus *ek*,

17 · 35 arcus *eg*.

30 · 0

12 · 25.

Igitur stella est in $\overline{12} \cdot 25'$ Virginis.

1) In Regiomontan's Tafel ist sin 36°42′ = 35858.

Nunc pro latitudine stelle, scilicet arcu *oq* (Fig. 4).

col. 2.

hd · *dz*		*zd* · *dh*
ht · *to*	conversim	*ot* · *th*
oq · *qz*		*zq* · (*qo*)

| 54999 sinus *dh*

$\overline{9}$ · 6′ · 4″
5 · 58 · 56
15 · 5 · 0 arcus *ot*; 15613 sinus *ot*
9 · 6 · 4
80 · 53 · 56 complentum arcus *ht*; 59245 sinus *th*
60000 sinus *zq*

Fig. 4.

54999	3	
15613	4	
164997	262	
54999	573	
329994	16893	1
274995	2526355	4
54999 [1])	23948137	4
21 3	36624373	9
85869 | 9387	858699387	4
14311	592455555	
14312	5924444	
	59222	
	599	
	5	

14494 sinus arcus *oq*; $\overline{13}$ · 59′ arcus *oq*[2])

Hic arcus est latitudo stelle meridionalis quesita.

Examinabo.

col. 3.

		| totus
ha · *az*		*ha* · *az*
hl · (*lo*)	,	*ok* · *kz*
		totus
ok · *kz*		*hl* · (*lo*)

Igitur *kz* ad *ok* ut *az* ad *lo*.

1) Hier hat Regiomontan erst durch den *Sinus totus* statt durch sin *th* dividiert, die falsche Division aber zu tilgen vergessen. Die Art der Division durch 60000 ist in ihrer Art sehr bemerkenswerth. Da der Rest grösser als die Hälfte des Divisors ist, so wurde die letzte Ziffer des Quotienten um eine Einheit vergrössert.

2) 14494 ist vielmehr nach Regiomontan's Tafel der Sinus von 13°57′, dagegen sin 13°59′ = 14498.

```
19 ·  4′ arcus ek
 7 · 28 · 34
 7 · 51 · 25
     22 · 51
─────────────
        4
    1 · 28
a       3
    ──────
    1 · 31
─────────────
 7 · 30 ·  5 arcus kq
13 · 59
─────────────
 6 · 29  arcus ok;   6775 sinus ok
90 ·
 7 · 30
─────────
82 · 30       arcus kz;   59487 sinus kz
66 · 26 · 30 arcus az;   54999 sinus az
```

```
               59487 · 54999
                6775 ⁄
```

```
                              7         |
                              2         |
                            231         |
       54999                792         |
        6775              38991         |  6
   ─────────              56144         |  2
      274995             679864         |  5
     384993            18236864         |  3
    384993            372618225         |
   329994              59487777         |
   372618225             594888         |
                           5944         |
                             59         |
```

6253 sinus declinationis stelle. Satis est.

| Nunc pro arcu diurno stelle huius (Fig. 5). col. 4.

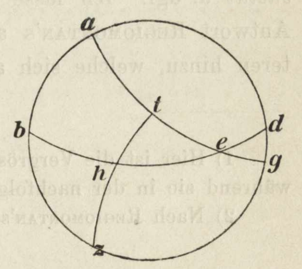


Fig. 5.

	42610 sinus *ab*,
ab · *bz*	42242 sinus *bz*,
th · *tz*	6253 sinus *th*,
ae · (et)	59637 sinus *tz*,
	60000 sinus *ae*.

	342	
6253	467	
42242	685	
12506	42334	6
25012	184145	1 [1]
12506	2257834	9
12506	264139226	8
25012	42610000	
264139226	426111	
	4266	
	42	

	7	
	8	
	159	
	1477	
	29998	
6198	316726	6
60000	498837	2
371940000	17322414	3
	371940006	2
	59673333	
	596777	
	5966	
	59	

20(10)b col. 1.

| 6233 sinus arcus *et*; $\overline{5} \cdot 58'$ arcus *et* [2])

84 · 2′.

84 · 2

168 · 4 arcus diurnus stelle.

Die Antwort Bianchini's auf diesen Brief ist ebenfalls vorhanden. Sie hat v. Murr nur auszugsweise abdrucken lassen, und er hat die Orthographie Bianchini's sehr verändert. Letzterer liebt es, die einfachen Consonanten zu verdoppeln. So schreibt er z. B. *cellum* für *celum*, *subtilli* für *subtili* u. dgl. Ich lasse auch diesen Brief hier folgen, drucke dann die Antwort Regiomontan's ab und füge am Ende die Rechnungen des letzteren hinzu, welche sich auf diese beiden Briefe beziehen.

1) Hier ist die Vergrösserung der letzten Ziffer um eine Einheit unterblieben, während sie in der nachfolgenden Division wieder geschehen ist.

2) Nach Regiomontan's Tafel ist sin $5^0 58' = 6237$.

II.

Giovanni Bianchini an Regiomontan.

| $\widetilde{Y + S}$ Xpus Maria
1463, die 21 Novembris.[1])

Blatt 11(1)[a]

Hiis diebus ellapsis apportate mihi fuerunt litere vestre, quas certe non parum gratissimas habui tam ex vestra subtilli et vera terminatione interrogatorio meo, quam, que per ipsas comprehendo, ad noticiam ℞[mi] in xp̃o patris et amici communis nostri D. Cardinalis Niceni, cui certe ex corde desidero commendatum esse, tam ex sua profundissima sciencia, cuius fama per totum orbem vollat, quamque ex sua benignissima humanitate et erga me benevollentia, dum ab Illustri olim D. meo dño Leonello missus fuissem anno Iubillei ad Dominationem suam pro facto monetarum, factaque certa congegratione civium et ex animata canna, voluitque me ad prandium cum Dominatione sua esse. Ex quo semper me ℞me Dominationi sue obligatum esse reputo, cui me et mea supplico, quod inter numerum servitorum suorum me poni faciat et in memoria habeat.

Examinavi dilligens responsiones vestras et conclusiones interrogatorii mei, quas scienter et recte terminastis. Vidi etiam quatuor observationes per vos, ut dicitis, factas de alliquibus stellis fixis in diversis locis et temporibus, quibus brevi interllogo quam potero, ipsas terminabo. Et quia a | magistro Cristophoro Briscensi nostro pluribus mensibus ellapsis habui, quod nobis accomodauit tabullas meas[2]), puto vos forte habere copiam vobiscum, quod mihi valde gratum esset, quia summopere desidero, illas ad manus peritorum, ut vos estis, perveniant. Et ideo, ut vos in praticha operationis tabullarum mearum secundum doctrinam canonum operationes meas comprehendatis, conclusionesque meas per tabullas approbando describam, manifestum est, quod, si per latitudinem stellę declinatio invenitur, etiam per operationem conversam per declinationem latitududo(!) invenietur: Sapienti paucha sufficiunt.

11(1)[b]

Et si responsiones meas ad literas vestras in longum deductę sunt, veniam quesso. Nam de mense iunii causa evitandi dubium pestis huc cum tota famillia mea ad possessiones meas applicavi(!) ubi ex mandato Illu-

---

1) Diese Notiz ist von Regiomontan's Hand.

2) Die hier erwähnten Tafeln sind handschriftliche, da die erste Ausgabe derselben erst 1495 (nicht, wie bei Riccardi verdruckt ist, 1459) erschienen ist. Der Titel ist: Tabularum Ioannis | blanchini canones. Am Ende: Impreſſū itaqꝫ Solertia ꝛ cura nō | mediocri Symōis biuilaque papiē|ſis āno 1495 die 10 Iunii. Venetiis. 344 Blatt 4⁰ ohne Numeration mit den Signaturen A—C, a—z, ꝛ, ɔ, ♃, A—O.

strissimi D. mei Ducis data est mihi cura totius istius pollicini, ipsum totis viribus a contagione pestis conservando. Ubi per me posti sunt custodes in locis opportunis, ut alliqui venientes a locis suspectis huc non applicent, nec aliqui in polliceno huius habitantes ad loca suspecta acce- 12(2)[a] dant absque licentia, condonando et puniendo | deliquentes, ex quibus non parum extraticii incurit. Sed ultra hoc, quasi omnes de famillia mea ac etiam spectabilis D. Annibаllis de Gonzaga, gener meus, passi sunt febribus sicis, multi convicini passi sunt. Et consors mea a tribus mensibus citra et ad de presenti a quartana retinetur, et ego quidem, ab aliquibus diebus citra et de presenti a febribus passus sum. Spero tamen ab ipsa in brevi liberari. Et similliter fillia mea, uxor D. Aniballis, a febre, a qua patitur, liberabitur, dato quod a gravissimo pericullo evassa sit. Spero tamen, domino concedente cum securitate, alias et sepe nobiscum confere. Nec vobis molestum erit, dubia vestra mihi patefacere, nam non tantum utille, sed necessarium est, stelle fixe verificare, et me ad tallem prathicam in loco isto personaliter cognosco negligentem.

Feci propter hoc instrumentum demonstrans altitudinem stellę per g̃ · m̃ · 2̃, cuius puto vidistis compositionem et operationem in canonibus tabullarum mearum de primo mobilli, cum quo operari potest in stellis. Sed ego in hoc parum excercere possum.

Videbitis autem decissiones meas ad quessita vestra et approbationes, 12(2)[b] quas subiunxi | ex canonibus et tabullis meis de primo mobilli extractis[1]) et operationes tabullarum magistrallium per me compositarum, et si non vidistis, videbitis in quanta brevitate reducitur calchullus, et non dubitetis, quod omnia demonstravi in libro florum almagesti.[2]) Reduxi enim denominationes sinuum ad numeros discretos propter abbreviationem et facillitatem calchulandi. Si vero illud non habetis illic, scilicet Tabullas meas de primo mobilli, sunt alliqui, qui Venetiis illę habent, et specialiter Egregius Magister Allexander Boromei, artium et medicine Doctor, quem non dubito ad requisitionem vestram seu ℞mi D. Cardinallis et Legatis(!) libentissime accomodabit. Et libentissime audirem, quid vobis videtur pro illis; et quid ex ipsis videtur corrigendum, vobis doctissimo, assentiam.

Et prosequendo ad decissionem quessitorum vestrorum in sequentibus accedam.

Primum quessitum est: Quedam stella fixa in medietate zodiaci de- Fol. 21, facie 1.[3]) scendentis, declinatio semptemtrionalis est g̃r 35 m̃ 17, latitudo autem

1) Diese Rechnungen sind jetzt nicht mehr vorhanden.

2) Dieses Werk Bianchini's ist Manuskript geblieben und wahrscheinlich völlig verloren gegangen.

3) Diese und die folgenden Randbemerkungen beweisen, da sie von Regio-

septemtrionalis g̃r 20 m̃ 49: queritur locus eius verus, et cum quo puncto cellum mediat, supponendo declinationem maximam | g̃ 23 m̃ 30 · 2̃ 30, sicut ipsum multotiens cum instrumento alias in diversis temporibus consideravi dilligenter. 13(3)[a]

Respondendo autem dico, stellam ipsam fuisse in g̃ 17 m̃ 37 Leonis, mediavitque cellum cum g̃ 25 · 28 Leonis, quibus correspondent g̃ 147 m̃ 45 assensionum, id est de gradibus equinoctialis.

Secundum quessitum est: Quedam stella in g̃ 9 m̃ 15 Leonis solita mediare cellum cum g̃ 20 m̃ 37 Virginis: queritur, quanta sit eius declinacio et latitudo. Fol. 22, 2a facie.

Dico ipsam esse cum declinatione g̃ 69 m̃ 35, et latitudine g̃ 57 m̃ 25 equinoctialis.

Tertium quessitum est: Observatum est in loco, cuius latitudo est g̃ 43 m̃ 19, longitudo autem ab occidente habitato g̃ 33 m̃ 48 quedam stella fixa in nocte sequentis diei 12 Iulii 1463, que quidem orta est hora 3 m̃ 25 noctis, mediavitque cellum hora 7 m̃ 38: queritur locus eius, punctus mediacionis celli, latitudo quoque, declinatio et arcus diurnus.

Dico stellam ipsam fuisse per longitudinem in g̃ 9 m̃ 39 Piscium, et ortam esse in regione ipsa cum g̃ 18 m̃ 17 Piscium, quibus correspondent g̃ 349 m^{a} 5 ascensionum, et archus ipsius diurnus fuisse g̃ 126 m̃ 30, cuius medietas est g̃r 63 m̃ 15. Et omnia ista patent per problema (!) vestra alioque inventione veri loci stelle habito loco mediationis celli per figuras sectoris, ut peroptime scitis, inventus est verus locus g̃ 9 m^{a} 30 Piscium, ut supra. | Hoc facto per locum verum et latitudinem regionis inventa est declinatio stelle g̃ 25 m̃ 4 in partibus etiam meridionali (!). 13(3)[b]

Per locum autem verum et declinationem appl modo inventi sunt g̃ 18 m̃ 7 Piscium, cum stella mediari cellum, atque per declinationem et latitudinem regionis probatur archum diurnum fuisse g̃ 126 m̃ 30 meridionales.

Ultimum per gradus eclipticos medii celli et archum diurnum ipsius in regione proposita et archum diurnum stelle cum sua latitudine septemtrionali inventum probatum, ascensiones stelle cum sua latitudine fuisse in orizontis g̃ 15 m̃ 50 cum g̃ 28 m̃ 28 Arietis.

Quartum quessitum est: In regione latitudinis 45, longitudinis g̃ 31 m̃ 45, de qua longitudine primo est curandum, quia horis presuponit longitudinem videlicet horis 3 m^{is} 38 noctis, que sequebatur diem 9 Augusti

---

MONTAN selbst herrühren, dass die Foliierung an der obern Seite der Blätter von 11—82 von ihm selbst herrührt, dass er also die Zusammenheftung der Briefe vorgenommen hat.

1463, visa est stella fixa, cuius declinatio septemtrionalis inventa est g̃ 13 m̃ 25, altitudo eius supra orizontem in hac consideratione inventa est g̃ 50 m̃ 19: queritur locus eius verus, punctus mediationis celli et latitudo.

Primo per declinationem datam et latitudinem regionis inventa est horam, qua stella ellevata fuit ab orizonte g̃ 50 m̃ 19, fuisse hora 5 m̃ 3 post ortum ipsius, presupponendo, fuisse, cum qua applicuisset ad lineam meridianam, et hoc presupponendum est. Et quia hoc fuit post ocassum Sollis hora 3 m̃ 38, sequitur fuisse hora 1 m̃ 25 stellam ipsam ortam 14 (4)[a] esse circa ocassum Sollis, que capiunt | de motu equinoctialis g̃ 21 m̃ 15. Sollis autem locus tunc fuit in g̃ 25 Leonis cui desscensiones in regione, quo respondent g̃ 340 m̃ 56. A quibus demtis g̃ 21 m̃ 15, sequitur stellam ortam fuisse cum g̃ 319 m̃ 41 equinoctialis.

Hoc facto per declinationem stelle et latitudinem regionis invenitur, medietatem archus diurni stelle fuisse in regione g̃ 103 m̃ 48, et per consequens differentiam medietatis archus diurni stelle ab equalli fuit g̃ 13 m̃ 48. Qui additi cum asscensionibus, cum quibus stella oritur, que ut supra fuerant g̃ 319 m̃ 41, et hoc, quia archus stelle excedit equalle. Fuerunt ergo ascensiones stelle correspondentes in medio celli g̃ 333 m̃ 29, quibus correspondent de ecliptica g̃ 1 m̃ 26 Piscium cum stella in medio celli.

Hoc facto per figuram sectoris cum adiutorio precedentium, ut novistis, invenivi (!) verum locum stelle fuisse in g̃ 10 m̃ 38 Piscium.

Ultimo cum loco vero et declinatione stelle inventa est latitudo g̃ 22 m̃ 44 in parte meridionali. Per locum autem mediationis celli, videlicet g̃ 1 m̃ 26 Piscium, et archum diurnum ipsius in regione equiparatum cum archu diurno stelle verificabitur locus eius verus g̃ 10 m̃ 38 Piscium.

Et ut videre et examinare possitis facillitatem et brevitatem calculandi cum tabullis et canonibus meis de primo mobilli, mitto vobis seriatim et ordinatim presentis calchullum his scriptis inclussum, per quem apparebantur omnes mee conclussiones et responssiones quesitorum vestrorum, manu mea propria scriptum.[1])

Et si male scriptus est, quod malus scriptor sum et peior pronunciator excussatum me habeatis rogo, quia nunquam preceptorem habui, nec verssatus sum in scollis, sed converssatio mea fuit cum illustribus Dominis Ducibus meis de Domo Estenssis, et adhuc est. Et quicquid sum, semper sum paratus ad mandata ℞mi in x̃po patris et domini, Domini communis

1) Wie schon oben bemerkt ist, fehlen diese Rechnungen im jetzigen Manuskripte.

nostri Cardinallis Niceni et Legati etcetere, ac etiam ad mandata vestra prumtus ꝛcet Vale.

Ex Fossanova Sancti Gilii, Die XXI° Novembris 1463.

Io. Blanchinis.

| Consideratio in villa Fossanove Sancti Gilii, Ferrariensi districtu. 15(5)[a] Die 4 Augusti 1463 Sole existente in gr 19 m 48 Leonis circa meridiem accepi ipsius altitudinem, quam inveni g 33 m 49: quero oram post ortum (Fol. 22, facie 1a) ipsius, amplitudinem sui ortus, que est distantia per orizontem ab ortu vero, nec non tunc distantiam umbre ipsius per circulum orizontis usque ad contactum meridiani cum orizonte.

In quesito vestro secundo et responsione mea inventa est quedam stella in g 9 m 15 Leonis cum latitudine g 57 m 2 septemtrionalis: quero, si per alium calculum declinatio ipsius nota est g 19 m 35, deinde altitudinem ipsius ab orizonte hora 3 mis 25 post ipsius separationem a linea meridiana.

Tento, ut me tentetis.

Quero duos numeros proportionales ut 5 ad 8, quorum ad invicem (Fol. 23, prima facie) productus equatur aggregationi ipsorum.

Item quero de 10 facere duas partes, ex quibus maiorem per minorem divisam deinde minorem per maiorem et divisam, numeros autem cotientes (Fol. 23, facie 1a.) simul iunctos eorum summa sit 25, et hoc gratia colationis.

III.

Regiomontan an Giovanni Bianchini.

| Maria. 35(26)[a]

Io. Germanus ad Ioannem de Blanchinis.

Ingentes vobis habeo gratias, prudentissime atque doctissime vir, qui litteras meas ita humaniter suscepistis, ac si grande aliquid sive novi sive utile advexerint, quorum profecto neutrum in eis apparuit. Novi enim nihil attulerunt, cum questiones meas vobis propositas iam dudum tanquam usitatas valde habueritis, neque quicquam utilitatis. Quid enim profuit, more meo vestre respondisse interrogationi, cum longe facilius eam decidere liceat per tabulas vestras, quas de primo mobili contexuistis, quas equidem Rome Magister Christoforus mihi comodavit? Utinam ego copiam earum fecissem! Eas summopere et laudandas censeo et omnibus studiosis publicandas, quod breviter atque facillime, quidquid de primo mobili queritur, expediant. Non licuit autem hactenus earum exemplum comparare conditione mea moderna id agente, nam voluntas mea ex imperio Domini mei

℞mi pendere debet, cui serviendum est. Quo fit, ut minus libito studiis adherere possim, libros quoque quoslibet copiare. Curabo tamen, si possibile fuerit, eas vestras tabulas videre saltem nunc Venetiis, nisi mgr ALEXANDER[1]) ab humanitatis officio alienus sit, in eis me plurimum oblectabo et dignitatem earum domino meo ℞mo, si vacat, hilariter predicabo. Qui etsi antehac tam visu quam fama dominationem vestram cognoverit, pars tamen magna dignitati vestre accrevit, ubi virtutes vestras, ita ut equum erat, IOANNES vester GERMANUS dinumerare conatus est. Pergite igitur, ut cepistis, vicicissim pro vestra mansuetudine discipulum vestrum amplecti, qui summopere studebit, vobis morem gerere, cuius demum iocos, nisi me animus fallit, haud egre feretis, si integritatem animi sui perspectam habueritis, et si quandoque tentare vos videar, ridere quidem licebit ineptias meas. Ex fiducia autem, quam ergo dominationem vestram gero, huiuscemodi manare estimandum est. Hanc enim mihi assumpsi licentiam ex scriptis vestris, ubi inter bina interrogata vestra: „Tento", dicitis, „ut tentetis." Vocare poteritis tentationem pro vestra auctoritate, ego autem
35 (26)b fiducie nominum huic dabo postulationi. Sed ne equo diutius detineamus | ad cepta nostra exercitia veniendum est. Quod tardius, quam sperabam, litteris meis responderitis, etsi molestum valde mihi fuerit mei ex parte, qui tam diu litteras vestras desideratissimas accipere non debuerim, longe tamen molestius, imo intollerabile visum fuisset, si more vestre causam sensissem. Vehementer enim me conturbasset mala vestra valetudo atque morbus, qui et patrem familias et totum insuper domum oppressit, cuius sevitia, ut quam citissime extinguatur, deum oro suppliciter et spero id propediem affore, quo crebrioribus invicem litteris relevari possumus. Respondistis igitur tandem et optime et benissime, misistisque exempla numerorum, quos in ea re habuistis necessarios, boni et docti preceptoris officio fretus. Exemplis enim facile doctrinam quampiam consequi datur, pro quibus, quantas possum, habeo gratias. Stelle, de qua in primo quesito locum verum in ecliptica reddidistis in termino graduum 17 et minutorum 37 Leonis, ego tabule sinus auxilio (nam aliam apud ne tabulam habeo nullam) inveni gradus 17 minuta 34. Differentia trium minutorum parvi ponenda, nam operanti mihi non semper totus dividendus tollebatur, quandoque etiam multiplicans aut maior aut minor equo, sicut in his fieri solet, acceptus est. Supposui tamen in eodem quesito maximam Solis declinationem g̃ 23 mita 30, que declinatione maxima communiter usitata minor fere est tribus minutis. Transeat illud. In quesito quarto digne notastis, subiici oportuisse, stellam nondum meridianum attigisse aut ipsum

---

1) Der oben erwähnte ALEXANDER BORROMEI.

transivisse, nam due stelle, quibus sunt equales declinationes, equaliter utrique a meridiano pro eodem temporis instanti distare possunt, non tamen eundem in ecliptica locum habentes. Dum igitur et egregie solvistis universa, et quidem faciliter, per tabulas vestras, ego autem quicquid nunc Venetiis numerabo, non nisi per tabulam sinus consequi potero.[1]) Illud tamen non sit impedimento, quin ad me scribatis, quotquot et quecumque voletis interrogatoria. Si enim satis respondebo, scietis me labore ingenti id efficere, si minus digne, excusabitis me inermem. | 36 (27)[a]

Quod si ea, quam sub manibus habeo, tabula absoluta esset, facile omnia, que ad primum mobile referuntur, et alia multa possent expediri absque numerorum multiplicatione et divisione, absque sinuum per arcus et vice versa extractione. De qua quidem tabula, si veritatem mediocriter etiam auxero, nimis gloriari videbor, cum res admodum nova et hactenus infecta sit. Quicquid per eam investigare libebit, duobus tamen nnmeris introitualibus agebimus, quorum alterum in latere transversali, alterum in descendenti tabule immittimus, et in angulo communi reperiemus quesitum. Duos huic tabule accomodabo libellos, quorum primus quidem fundamenta tabule et operationum eius firmabit, secundus vero, quanam lege quilibet omnino novus artis discipulus per eam operare expedite possit.[2]) Decrevi autem ad Dominationem Vestram nunc mittere utilitates quasdam huius tabule more geometrarum per propositiones sive proposita distinctas, ut iudicium vestrum hac in re, quale sit, persentiam. Reliqua vero huiusmodi operis videbitis, ubi nomine domini mei ℞[mi] universis philosophie cultoribus divulgabuntur. Proposita ipsa utilitatum sive fructuum seriatim colligens in postrema membrana. Posteaquam ad interrogata mea sufficientissime

---

1) Wie aus den Rechnungen hervorgeht, war diese Tafel für den Radius 60000 berechnet.

2) Diese *Tabula primi mobilis* war also Anfang 1464 noch nicht vollendet. Später werden wir sehen, dass sie 1471 schon dem Könige Mathias Corvinus überreicht war. Sie erschien zusammen mit den *Tabulae eclypsium* G. Peurbach's im Jahre 1515 durch Tannstetter herausgegeben bei Lucas Alantsee in Wien. Regiomontan spricht in der obigen Notiz von *zwei* Schriften, welche er ihr gewidmet habe. Auch die zweite hat sich erhalten: *Fundamenta operationum, quae fiunt per tabulam generalem. Neuburgi ad Danubium* 1557. Herausgeber war Andreas Schoner. Da mir die *Tabula* selbst nicht zugänglich war, erlaube ich mir aus der „Geschichte der Trigonometrie“ v. Braunmühl's die sie betreffende Stelle hier einzurücken.

„Um die Einrichtung der Tafel kennen zu lernen, wollen wir uns an die Relation $\sin a = \sin c \cdot \sin A$ halten. Die Winkel c wachsen von Grad zu Grad unter der Überschrift: *„numeri transversales“*, die oben auf je einer Folioseite steht, so dass die Tafel 90 Seiten umfasst. Desgleichen wachsen die A gradweise und stehen unter *„Numeri laterales“* in drei parallelen Spalten auf jeder Seite;

respondistis, questiones quatuor remittere dignati estis, quibus si bene respondero, ipse iudicabitis, qui talium rerum plenam habetis peritiam. Erat autem scriptum vestrum super prima questione huius tenoris.

Consideratio in villa Fossenove Sancti Gillii, Ferrariensi districtu. Die quarta Augusti 1463° Sole existente in g̃ 19 mi[tis] 48 Leonis ante meridiem accepi ipsius altitudinem, quam inveni g̃ 33 mi[ta] 49: quero horam post ortum eius; amplitudinem sui ortus, que est distantia per orizontem ab ortu vero, nec non tunc distantiam umbre ipsius per circulum orizontis usque ad contactum meridiani cum orizonte.

Hic, tametsi latitudinem loci considerationis non adnotaveritis, tamen, cum a Ferraria parumper distet, accepi altitudinem poli urbis Ferrariensis, quam alias dedistis g̃ 44 mi[ta] 45 et 2[a] 4, cum qua et declinatione Solis graduum 14 minutorum 57 inveni ex figura sectoris divisa differentiam arcus semidiurni diversi et semidiurni equalis g̃ 15 m̃ 21, unde arcum semidiurnum oportuit esse | g̃r 105 m̃ 21. Deinde ex altitudine Solis considerata, quemadmodum res ipsa postulabat, concludo distantiam Solis a meridiano g̃ 56 m̃ 53 antemeridianam quidem. Hanc dempsi ex arcu semidiurno supra memorato, et relinquebantur g̃ 48 m̃ 28, et tantus erat arcus paralleli Solis centro eius et orizonte interceptus, tantusque computabatur arcus equatoris ascendens in tempore, quod fluxit ab ortu Solis ad instans considerationis, cui respondent more suo hore 3 equales m[a] 13 fere. Quo autem pacto ex altitudine Solis data cum ceteris cognitu necessariis distantiam eius a meridie invenerim, aperire non est consilium, ne nimium vobis concedat fastidium. Unum tamen ex sex modis diversis omnino eli-

36 (27)[b]

---

der Winkel a findet sich dann nebenan in Graden, Minuten und Sekunden ausgerechnet. Die Tafel wird dadurch wesentlich verwendbarer, dass Regiomontan die zur Interpolation nötigen Differenzen beigesetzt hat. Unter jeder Arealzahl steht nämlich der Unterschied derselben von der nächst höheren mit *„differentia descendens“* oder *„subiectiva“* bezeichnet, während in einer Spalte neben den Arealzahlen unter *„differentia lateralis“* die Unterschiede der zu einem bestimmten c und A gehörigen Arealzahlen, die dem nächsthöheren c und demselben A entsprechen, angeführt sind. So hat z. B. der zu $c = 64^0$ und $A = 55^0$ gehörige Teil der Tafel nebenstehende Gestalt.

Transver 64 sales.

Arcus				Diff. lateralis.
Lat.	Areales descendens			
g.	g.	m.	s.	m. sec.
55	47	24	46	
		45	29	32 · 25
56	48	10	15	
		44	58	32 · 16

Will man nun z. B. zu $c = 64^0 37'$ und $A = 55^0 43'$ den entsprechenden Wert von a berechnen, so sucht man unter 64 *(Transversales)* und 55 *(Laterales)* das zugehörige a *(areales)* $47^0 24' 46''$ auf. Da die Differentia descendens $45' 29''$ dem Wachstum des Winkels A um 1^0 entspricht, so ist sie für $43' (45 \cdot \frac{29}{60} \cdot 43) : 60 = 32' 36''$. Ebenso erhält man mittelst der Diff. lat. für $31' 25''$ den Zuwachs $19' \cdot 22''$, so dass sich schliesslich $a = 48^0 16' 44''$ ergiebt.“

gere libuit, quorum nonnullos in epitomate almagesti[1]) explanatos dedi in fine secundi, reliquos autem modos in problematibus reperire licebit, unde petere licebit, postquam codex ille tredecim tractatuum iussu domini mei publicabitur. Quem vobis quidem placiturum, nisi me animus fallit, plerisque autem aliis usu venturum arbitror. Amplitudinem ortus Solis in die considerationis vestre invenio g͞g 21 m͞m 18, et erat ipsa septemtrionalis. Et arcus orizontis inter circulum altitudinis Solis et meridianum comprehensus, quem videmini querere tertio, erat g͞g 76 m͞m 54, et est complementum arcus, quem arabico nomine vocant azimuth. Hac ex secundo problematum almagesti colligere decrevi, ubi demonstratum dedi sinum rectum distantie Solis a summitate capitum ad sinum rectum distantie Solis a meridie se habere sicut sinum complementi declinationis eius ad sinum arcus, quem vestra quesivit dominatio. Ad hec autem problemata scribenda me nuper stimulastis, quando primo vestro quesito respondendum erat. Duos iam ferme huius operis absolvi libros pedetenim reliquos undenos expediturus. Instituti autem nihil eorum, que in epitomate tradita sint, in huiusmodi problematibus repetere. Nam quo problemata intelligantur, epitomatis precognitio necessaria est. Sed quo ruit calamus? Dabitis, spero, veniam, si paulo prolixior fuerim, et quidem non sine vestra gloria. Hec enim, que dixi, opera iuditio vestro offerenda censui, quo plus autoritatis nanciscantur. De his satis. |

Hec ex capite 2^{i} epitomatis.

37 (28)[a]

Amplius littere vestre interrogatorie habent illud:

> In quesito vestro secundo et responsione mea inventa est quedam stella in g͞g 9 mi^{tis} 15 Leonis cum latitudine graduum 57 minutorum 2 septemtrionali: quero si per alium calculum declinatio ipsius vere est g͞g 69 mi^{ta} 35, deinde altitudinem ipsius ab orizonte hora tertia mi^{to} 25 post ipsius separationem a linea meridiana.

Hec sunt verba dominationis vestre. Revera (parcatis) nescio, utrum ex suppositis meis, videlicet vero loco in ecliptica et puncto mediationis celi, invenire iubetis declinationem eius, an potius ex loco eius in ecliptica cum latitudine. Nam neque satis intelligere possum, quonam modo vos ex suppositis meis declinationem stelle inveniatis. Sed exercitii gratia ad utrumque respondere conabor si prius figuram huic rei oportunam descripsero. Sit ergo (Fig. 6) colurus solstitiorum *abgd*, sub quo medietas equatoris *aeg* et medietas ecliptice descendens *bed*, ita quod *b* caput Cancri, *e* initium Libre et *d* Capricorni existant, sic enim figuram aptare locus stelle, qui

---

1) Gemeint ist: Ioannis de Monte Regio et Georgii Peurbachii *Epitome in Cl. Ptolemaei magnam compositionem. Venetiis 1496.* Zur Zeit des Briefes natürlich ebenfalls nur handschriftlich vorhanden.

est in hac medietate ecliptice, monet; polus mundi borealis sit *z*, polus ecliptice *h*, stella sit in *o* puncto, per quem ad duos polos predictos incedant arcus circulorum magnorum *zl* et *hok*, ipsi quidem equatori in punctis *l* et *k*, ecliptice autem in punctis *m* et *n* incidentes. Constat itaque *n* esse locum verum stelle in ecliptica, et *m* punctum, cum quo celum mediat, qui duo puncta sunt data in quesito meo, quoniam arcus, quos terminant, dati sunt. Vos autem respondendo et optime solvendo dubium accipitis arcum equatoris, qui inter caput Arietis et punctum *k* clauditur, eum vocatis radicem et subtrahitis ex ascensione recta respondente arcui ecliptice ad punctum *m* tirato, quicquid ascensio inter initium Arietis et punctum *l* comprehenditur, et relinquitur vobis arcus *lk*. Huius arcus *lk* sinu utimur in operatione. Nunc dico, sive duo puncta *m* et *n* dentur, sive alter eorum tantum, verbi gratia *n*, cum latitudine stelle, que est arcus *ne*, per aliam viam reperire posse declinationem stelle in *o* existentis, et non modo per unam, sed plures, quarum due nunc incidunt meditatione, 37 (28)[b] in quibus | neque arcus *lk*, neque *kn* necessarius est. Nam sit primo datus punctus *n*, locus scilicet verus stelle in ecliptica, cum latitudine *no*, et velimus invenire declinationem stelle, arcum scilicet *lo*, sic agendum est. Cum *e* sit polus coluri *abgd*, ut ex primo Theodosii de spheris[1]) constat, descendat ex eo per punctum *o* quadrans *eox*. Quo facto, licet per secundum triangulorum syllogismum[2]) cudere possem, tamen figura sectoris, in qua vos estis exercitatissimus, utar. Eos autem, quos de triangulis conscripsi libellos, propediem videbit dominatio vestra. Iam enim apud me non sunt, sed ex Roma brevi afferantur. Id opus amplexu vestro haud indignum videbitur, nam et ipsum expectat limaturam vestram egregiam. Sed redeo

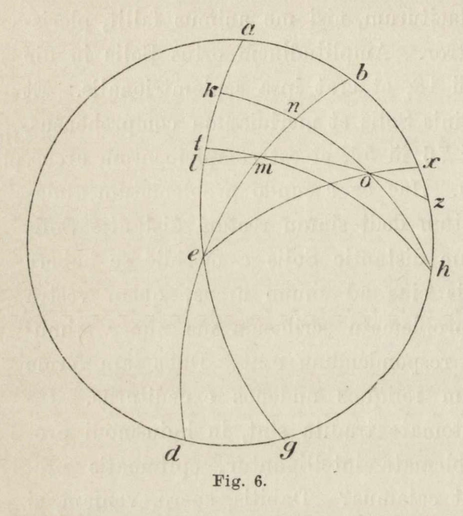


Fig. 6.

1) Es giebt zwei Übersetzungen dieses Werkes von Plato von Tivoli und von Gherardo Cremonese. Welche von ihnen Regiomontan bentzte, ist natürlich nicht zu entscheiden.

2) Da die sphärischen Dreiecke erst im 4. Buche behandelt werden, so dürfte bei Abfassung dieses Briefes nur Buch 2 und 4, das erste als Buch 1, das zweite als zweites gezählt, ausgearbeitet gewesen sein. Buch 1 und 3 der endgültigen Arbeit sind also erst später hinzugefügt worden.

ad ceptum. In figura sectoris, cuius caput est b punctus, pedes autem e et h, et venter o punctus, scilicet sectionis coniunctim argumentandi proportio eb ad bn componitur ex duabus proportionibus, quarum altera est proportio ex ad xo, altera oh ad hn (de sinibus non arcubus dico). Quinque autem horum arcuum sunt noti: eb quadrans, bn distantia veri loci stelle a principio Cancri, oh complementum latitudinis, hn quadrans et ex quadrans. Unde et arcus ox notus habebitur, cuius sinum habeo 20675, ipsum vero arcum $\overline{20} \cdot 8'$. Item eadem figura manente et eodem argumentationis genere arcus bx cognitus erit, si proportionem sinus hb ad sinum bx compositam ex duabus aliis, ut assolet, intellexerimus. Arcum autem bx invenio g̃ 63 m̃ 20, unde arcus hx relinquetur g̃ 26 m̃ 40, ex quo demo arcam zh equalem maxime Solis declinationi, ut residuus maneat arcus zx g̃r 3 m̃ 6. Hinc arcus ax venit g̃r 86 m̃ 54. Iam ad aliam sectoris figuram me transfero, cuius vertex est punctus a, pedes autem e et z, punctus sectionis o. Erit quoque proportio za ad ax composita ex duabus, scilicet ex proportione zl ad lo et ex oe ad ex. (De sinibus horum loquor.) Quinque autem noti sunt. Est enim arcus oe notus propter arcum ox superius cognitum, quare et arcus ol non ignorabitur, scilicet declinatio stelle, quam sic numerando elicui g̃ 69 m̃ 38; differimus in tribus unitatibus. Sed transeant. Est et alius modus, quam nunc missum facio. Quod si intentio questionis vestre fuerit, ex duobus punctis m et n datis per alium modum invenire declinationem lo, respondeo, id iterum duobus aliis modis fieri posse, et quidem hec omnia per tabulam sinus tantummodo absque suffragio aliarum quarumcumque. Dico autem de modis iam in memoria existentibus, quos nunc preterire fuit consilium, ne libido vobis respondendi vertatur | in molestiam. Ab initio enim huius rei tanta verba non rebar me facturum. Sed quid hoc est? Dum procedit calamus alium effudo modum predicta solvendi. Sic tres alios a modo vestro, qui per ascensiones vadit, reperire licuit. Credite mihi, non recito somnia. Nihil enim horum preteribo, ubi ad octavum librum problematum ventum fuerit, quin imo omnia acuratissime conscribam, quo tandem effecto eiusce rei iudex eritis obtatissimus. 38 (29)[a]

Deinde querebatur altitudo huius stelle, distantiam a meridiano habentis in tempore quidem horas tres m̃ 25. Hec stella in orizonte vestro non oritur neque occidit, sed habet duas altitudines meridianas inequales. In qualibet ergo revolutione primi mobilis quatuor habet a meridiano tantas distantias, quantam vos posuistis unam. Accepi autem distantiam a superiore parte meridiani, nam non difficilius reddidissem altitudinem suam, que debetur tante distantie a parte inferiori ipsius meridiani, et altitudinem stelle quesitam inveni g̃ 54 m̃ 34. De hoc iam satis.

Ad tertium, quo dicitis: Quero duos numeros proportionales ut 5 ad 8, quorum ad invicem productum equetur aggregationi ipsorum. Hoc est aliud genus questionum. Profecto, nisi molestum viderem, tantis litteris una dumtaxat vice respondere, duos producerem modos, quibus huic interrogato satisfacerem, sed neutrum eorum fortasse dominatio vestra expectat. Quare per alium tertium respondebo modum, quo demum sciatis, artem rei et census (vocant arabice algebram) mihi esse familiarem. Pono primum 1 rem, unde ex ypothesi vestra secundus erit $1\frac{3}{5}$ rei. Duco alterum in alterum, producuntur $1\frac{3}{5}$ census. Item coniungo eos, resultant $2\frac{3}{5}$ ꝛ. Habeo igitur census equales rebus, quare secundum precepta artis agendo invenio minorem numerum, quos queritis, $1\frac{5}{8}$, maiorem autem $2\frac{3}{5}$.

Queritis quarto de 10 facere duas partes, quarum maiorem per minorem dividendo, et item minorem per maiorem, numeros quotiens colligendo resultant 25. Respondeo ponendo primum 1 ꝛ, et secundam, quemadmodum res postulat, 10 ı̅g̅ 1 ꝛ etc. Primum invenio 5 minus radice de $21\frac{8}{27}$, secundus autem et maior est 5 et radix quadrata de $21\frac{8}{27}$. Habebam enim censum et numerum equalem rebus. Igitur secunda pars est binomium quartum, prima autem recisum eius. Potui autem et hoc solvere duabus 38 (29)[b] aliis viis, | sed nunc eam elegi, quam vobis arbitror familiarissimam, per artem videlicet rei et census, quod querebatur, absolvendo.

Si itaque vestris interrogatis sufficienter respondi, facile iudicabitis, qui omnium huiuscemodi rerum abundantissimam habetis peritiam. Opinione etenim mea satisfactum est. Potuit tamen error quisquam numerandi intercidere, ut solet fieri. Talem, si offenderitis, pro mansuetudine vestra tolerandum velim. Nihil enim eorum, que numerando scrutabar, repetivi. Nunc vestrum est officium, ut litteras alias ad me mittatis, quas equidem eo hilarior suscipiam, quo tempestivius advolabunt. Pollicebar superius propositiones secundi libri ad tabulam meam pertinentes seriatim perstringere, quod nunc persolvam ex ordine.

1. Generalem tabule usum in primis explanare. Usus tabule est intrare cum duobus numeris, ut supra tetigi. In angulo enim communi reperitur quesitum. Verum huiusmodi introitus pro nonnullis quesitis non est unicus, sicut neque unica operatio sufficit per sinus procedendo. Hoc tamen advertendum, quod quilibet huiusmodi introitus tantum facit, quantum alias una multiplicatio sinus per sinum et divisio producti per certum sinum, sed et neque sinum arcuare, neque arcum sinuare oportet, imo prorsus ab operatione sinuum excusat hec tabula. Satis nunc.

2. Cuiuslibet puncti ecliptice ab equatore declinantis declinationem invenire. Intra cum distantia puncti dati a sectione equatoris et ecliptice

viciniori et cum maxima declinatione. Reperies enim in angulo communi declinationem quesitam etc.

3. Proposita declinatione Solis quantalibet cui puncto ecliptice, aut quibus punctis respondeat, explicare.

4. Latitudinem Lune investigare.

5. Cuiuslibet arcus ecliptice ab equatore sumentis initium ascensionem in sphera recta invenire.

6. Ex ascensione recta et altera sectionum ecliptice et equatoris initium sumente arcum ecliptice sibi debitum indagare.

7. Amplitudinem ortus unicuiusque puncti ecliptice ab equatore declinantis computare.

8. Ex amplitudine ortus supposita punctum ecliptice, cui ipsa respondet, deprehendere.

9. In omni regione arcum diurnum puncti ecliptice, quodcumque etiam dederis, numerare.

10. Idem aliter concludere. | 39 (30)[a]

11. Cuiuslibet arcus ecliptice a sectione incipientis ascensionem obliquam in qualibet regione dimetiri.

12. In omni regione ex data ascensione obliqua ab altera sectionum initium sumente arcum ecliptice sibi debitum invenire.

13. Altitudinem Solis supra orizontem existentis in omni regione omnique hora perpendere.

14. Dum Sol in signis septemtrionalibus fuerit, altitudinem eius in circulo orientis perscrutari. Quis sit circulus orientis ille, in secundo problematum diffinitum est.

15. Arcum azimuth Solis aut alterius stelle dimetiri.

16. Angulum ex concidentia ecliptice et meridiani apud quodlibet punctum ecliptice provenientem comprehendere.

17. Angulum ex concursu ecliptice et orizontis orientalis procreatum pronuntiare.

18. Quantitatem anguli ex ecliptica et circulo altitudinis producti exequire.

19. Idem aliter comprehendere.

20. Quod due precedentes promiserunt, alio tramite perscrutari.

21. Gradum ascendentem vel punctum orientis in omni regione et omni hora per hanc tabulam elaborare.

22. Si quis ascendentem in regione qualibet habuerit, quo pacto medium celum investiget, manuducere.

23. In omni regione altitudinem Solis supra orizontem existentis quacumque hora data aliter quam superius dinumerare.

24. Arcum orizontis, quem secat circulus horarius ex eo, deprehendere. Quis sit arcus, quem significet, alibi lucubrabitur.

25. Arcum circuli orientis, quem horarius quilibet ex eo secat circulus, mensurare.

26. Puncta flexionis tenebrarum in eclipsibus determinare.

27. Cognito loco vero stelle fixe cum eius latitudine declinationem suam ab equatore sciscitare.

28. Punctum ecliptice, cum quo stella quelibet celum mediat, determinare.

29. Quod precedens docuit, alio tramite percontari.

30. Declinationem stelle fixe cuiuscumque altitudinis investigare.

31. Punctum, quocum stella quelibet celum mediat, aliis quam supra mediis inquirere.

32. Ex data stelle declinatione punctoque ecliptice, cum quo ipsa celum mediat, latitudinem eius atque verum locum in ecliptica diffinire.

33. Arcum diurnum stelle dimetiri.

34. Punctum ecliptice, quocum stella quelibet aut oritur aut occidit, 39 (30)[a] diffinire. |

35. Per altitudinem stelle cuiuscumque et azimuth atque medium celi declinationem eius stelle et punctum, cum quo celum mediat, indeque latitudinem et verum locum eius in ecliptica subtiliter indagare.

36. Arcum apparitionis aut occultationis stelle perscrutari.

37. Equationem octave sphere secundum ALFONSI fundamenta numerare.

38. Equationem octave sphere secundum imaginationem TEBITH computare.

39. Equationem Solis colligere.

40. Equationem argumenti Lune dinumerare.

Sed quo ruit calamus ille molestus et audax? Forsitan omnia astronomorum quesita ad hanc unicam tabulam appellet? Dico ego, bonam partem huiusmodi quesitorum per hanc repertum iri tabulam, si prius concentricam astronomiam totam fundaverimus. Quid illud? Diversitates motuum planetarum per concentricos salvare pulcrum erit. Iam Soli et Lune viam dedimus, de reliquis autem quedam initialia iacta sunt, quibus completis equationes omnium planetarum per hanc tabulam numerare licebet. De hac re nihil amplius in presentiarum, ne legendi scripta mea magis patramini fastidium, quam ego scribendo voluptatem habeam. Si quid harum rerum audentius equo dixisse videor, posteris litteris rationes meas luculentius (sic puto) accipitis. Mallem tamen voce quam calamo hisce de rebus disserere. Facilius enim multo et expeditius foret. Dum id fieri nequit, littere voci officia sumant, que, quicquid afferent, vestro iudicio

limandum erit. Institui ire Mediolanum pro certo negotio. Nunc reliqui nihil scribendi est sententia, verum operiar litteras vestras dulcissimas atque, ut materies ad me scribendi detur, questiones mittere decrevi subscriptas.

1. Est quedam stella latitudine carens in $\overline{10} \cdot 25'$ Tauri, et alia item in $\overline{27} \cdot 29'$ Tauri absque latitudine, tercia autem latitudinem habens septemtrionalem distat a prima per $\overline{6} \cdot 18'$ circuli magni per earum centra transeuntis; a secundo autem distat per gradus 20 m̃ 47: quero verum locum huius tertie stelle in ecliptica et eius latitudinem.

2. Sunt due stelle fixe ab ecliptica versus septemtrionem elongate, quarum unius latitudo est $\overline{9}\,'\,26'$, alterius vero $\overline{35} \cdot 53'$, distantia autem inter corpora stellarum est $\overline{8} \cdot 45'$: quero quantum distent loca sua vera in ecliptica.

÷ 3. Est circulus diametrum habens 60 pedum. Huic inscriptum est quadrangulum, cuius quatuor latera proportionem habent, quas illi numeri 4 · 7 · 13 · 17: quero, quanta sit area huius quadranguli. 40 (29)[a]

4. Sphera quedam habet diametrum 100 pedum, cui inscripta est pyramis basim habens trilateram. Huius pyramidis sex latera sunt in proportionibus horum 6 numerorum: 3 · 5 · 8 · 11 · 13 · 16: quero, quanta sit corpulentia huius pyramidis.

5. Sunt duo numeri, quorum differentia est radix quadrata de 5 (aut sic, quorum alter in alium ductus reddit radicem de 250)[1]), quadrati autem dictorum numerorum se multiplicantes, videlicet alter alterum, producunt 250: quero, qui sint illi duo.

6. Quidam mercator cum 100 ducatis in primo anno lucratur aliquid; deinde in secundo anno cum capitali et lucro primi lucratur propotionaliter ut in primo, et in tertio anno iterum proportionaliter cum capitali et duobus lucris duorum annorum precedentium. Quo facto in universo, videlicet ex capitali et tribus lucris, colligit 265 ducatos: quero, quantum in primo anno lucratus sit.

7. Tres socii ponunt communiter 70 ducatos et lucrantur cum eis 20 ducatos, quorum primo cedunt pro capitali et lucro 15 ducati, secundo 25, tertio autem 50, et stat pecunia capitalis primi tribus mensibus, secundi autem quinque, et tertii 6 mensibus: quero, quanta sit summa capitalis primi socii.

8. Quero numerum, qui si dividatur per 17, manent in residuo 15, eo autem diviso per 13, manent 11 residua, et ipso diviso per 10 manent tria residua: quero, quis sit numerus ille. 1103.

1) Die Klammer gehört eigentlich hinter den nächsten Satz, vor das Kolon, aber sie steht in der Handschrift an der hier gegebenen Stelle.

Die zu diesen beiden Briefen gehörigen Rechnungen des Regiomontanischen Manuskriptes sind folgende:

21 (11)[a], col. 1.

| **Primum interrogatum meum.**

Stella existens in medietate celi descendentis, habens latitudinem septemtrionalem $\overline{20} \cdot 49'$, declinationem item borealem $\overline{35} \cdot 17'$: queritur locus eius, arcus etc. Supponitur maxima declinatio Solis $\overline{23} \cdot 30'$.

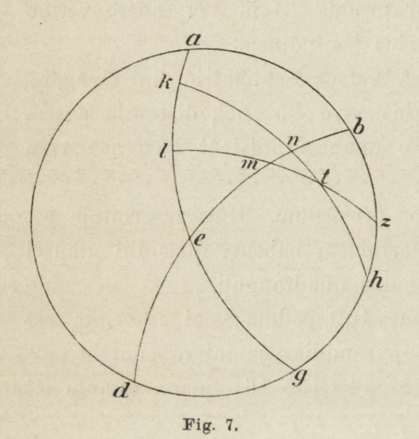


Fig. 7.

Ecce occurrit triangulus tzh trium notorum laterum (Fig. 7).

In figura secunda (Fig. 8) sit t polus circuli qy, erunt quoque duo arcus hx et zq noti, quoniam complementa arcuum tz et th notorum, quare proportio sinus zy ad sinum hy nota, cumque differentia arcuum sit nota, scilicet arcus hz, reliqua constabunt, si figuram tertiam (Fig. 9) respexeris.[1])

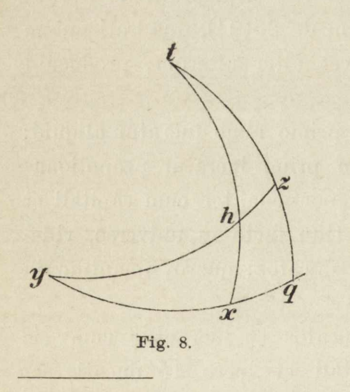


Fig. 8.

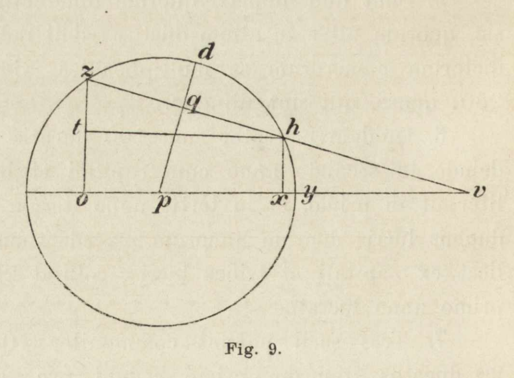


Fig. 9.

1) Regiomontan benutzt hier die im IV. Buche seiner Trigonometrie gelehrte, auch von Nasîr Eddîn gebrauchte Methode zur Bestimmung des Winkels aus den drei Seiten, wie sie v. Braunmühl S. 69 seiner „Vorlesungen über Gesch. der Trigon.“ in unserer Bezeichnungsweise dargelegt hat. An der betreffenden Stelle des Buches IV (Prop. XXXIV), der letzten des Buches, giebt Regiomontan kein durchgerechnetes Beispiel, es dürfte deshalb das hier folgende auch deshalb interessant sein, weil jede Rechnung wirklich ohne jede Auslassung durchgeführt ist. Die Aufgabe und ihre Lösung ist aber ein weiterer Beweis dafür, dass das IV. Buch der Trigonometrie schon 1463 vollendet vorlag.

$\overline{23} \cdot 30'$ arcus *hz*
35 · 17
54 · 43 arcus *tz*; 48978 sinus *tz*.
20 · 49
69 · 11 arcus *th*; 56083 sinus *th*.
34657 sinus *tl*, sive *zo*.
21323 sinus *tm*, sive *hx*.

$\overline{11} \cdot 45'$ medietas arcus *hz*; 12219 sinus arcus *dh*.
12219
24438 corda *zh*.

34657
21323
13334 linea *zt*.

| 13344 · 21323 col. 2.
24438 /

col. 3.

	11	
24438	62	
21323	3177	
73314	123718	3
48876	2328752	9
73314	521091474	0 [1]
24438	133444444	5
48876	1334444	0
521091474	13333	
	133	
	1	

| 39051 linea *hv*. [2] col. 4.
12219
51270 linea *qv*.

$\overline{11} \cdot 45'$ arcus *dh*.
78 · 15 complementum *dh*. 58743 linea *pq*.

---

1) Hier ist wieder die letzte Ziffer um eins vermehrt worden.

2) Bei dieser Division hat sich Regiomontan zuerst dreimal verrechnet. Zunächst findet er 389 als die drei ersten Ziffern, dann 38301 als Quotient, beginnt dann nochmals mit 38, um dann endlich das richtige Ergebnis zu erhalten. Es erübrigt wohl die drei unrichtigen Rechnungen ebenfalls hier mitzutheilen.

21 (11)[b], col. 1.

```
| 51270                          58743
  51270                          58743
-------                         ------
 3588900                         176229
10254                           234972
5127                           411201
25635                         469944
                             293715
----------                   ----------
2628612900 quadratum qv;     3450740049 quadratum pq.
3450740049
----------
6079352949 quadratum qv.
```

```
      1
    16343
   451992        |
  1195746        | 7
 6079352949      | 7
 1 4 4 8 4       | 9 1)
  1 5 5 9        | 7
   1 5 5         | 0
    1 5          |
     1           |
```

77970 linea pv.

col. 2.

```
| 77970 · 58743
  60000 /
```

```
                       132         |
                      1555         |
                     26934         |
58743               4552581        | 4
     60000         74873642        | 5
----------       352458000|0       | 2
3524580000         77977777        | 0
                    779999         | 4
                     7777          |
                      77           |
```

45204 linea pq, ut pv est 60000.

$\overline{48} \cdot 53'$	angulus pvq.
$41 \cdot 7$	angulus vpq.
$11 \cdot 45$	
$29 \cdot 22$	arcus hy.
$23 \cdot 30$	
$52 \cdot 32$	arcus zy.

1) Auch hier hat sich Regiomontan zweimal verrechnet und erst der dritte Anlauf giebt den richtigen Werth der Wurzel.

60 · 38 complementum arcus hy; 52290 sinus complementi hy.
37 · 8 complementum zy; 36220 sinus complementi zy.

56083 · 52290
60000 /

	114	
	23268	
	746791	
	35283312	5
52290	683255384	5
60000	3137400000	9
3137400000	560833333	4
	5608888	2
	56000	
	566	
	5	

| 55942 sinus complementi xy; $\overline{68} \cdot 49'$ complementum xy.[1]) col. 3.

48978 · 36220
60000 /

	1	
	64	
	345	
	16716	
	28171	
26220	522941	4
60000	2144677	4
2173200000	55748864	3
	2173200000	7
	489788888	0
	4897777	
	48999	
	488	
	4	

44371 sinus complementi qy; $\overline{47} \cdot 41'$ complementum qy.[2])

$\overline{68} \cdot 49'$
$47 \cdot 41$
$\overline{21 \cdot 8}$ arcus qx, est etiam quantitas anguli htz.

21632 sinus anguli htz.
23925 sinus arcus hz.

1) Nach der Sinustafel Regiomontan's ist sin $68^0 49' = 55946$.

2) Nach der Tafel ist sin $47^0 41' = 44366$, man sieht aus Allem, dass es auf Genauigkeit nicht ankommt.

```
                    23925 · 21632
                    48978 /
                                   12
                                   431
col. 4.       | 48978              194
                21632              2763
                -----
                97954              16815       | 4
              146934             12249732      | 4
             293868             233618431      | 2
             48978             1059492096      | 8
            97956               239255555      | 3
           ----------            2392222
           1059492096             23999
                                   233
                                    2
```

44283 sinus anguli *thz*[1]); $\overline{47} \cdot 34'$ angulus *thz*.

Et tanta est distantia stelle a capite Cancri; est igitur in $\overline{17} \cdot 34'$ Leonis. Blanchinus habet $\overline{17} \cdot 37'$, verum ipse usus et declinatione maxima $\overline{23} \cdot 33' \cdot 30''$, quam in tabulis suis supponit.

22 (12)[a]

| Interrogata D. Ioannis Blanchini.

Consideratio in villa Fosse nove Sancti Gillii in Ferrariensi districtu. Die 4[ta] Augusti 1463, Sole existente in $\overline{19} \cdot 48'$ Leonis ante meridiem accepi altitudinem eius, quam inveni $\overline{33} \cdot 49'$: quero horam post ortum ipsius, amplitudinem sui ortus, nec non distantiam umbre ipsius per circulum orizontis inter circulum altitudinis Solis et meridianum.

Quoniam in alio quesito dedit latitudinem Ferrarie $\overline{44} \cdot 45' \cdot 4''$, utor eadem latitudine nunc $\overline{44} \cdot 45'$; de secundis enim curare non utendo (Fig. 10).

$\overline{14} \cdot 57'$ declinatio Solis septemtrionalis

44 · 45 arcus *zd*;	42241 sinus *zd*;	secundus,
45 · 15 arcus *dg*;	42611 sinus *dg*;	primus,
14 · 57 arcus *hk*;	15479 sinus *hk*;	tertius,
75 · 3 arcus *hz*;	57969 sinus *hz*;	quartus,
	60000 (sinus totus);	quintus.

Fig. 10.

1) Hier hätte die letzte Ziffer um 1 erhöht werden müssen. In Regiomontan's Tafel ist der betreffende Sinus auch = 44284.

42241
15479
380169
295687
168964
211205
42241
653848439

12
235
13972
129256
2468675
237733195
| 653848439
426111111
4261111
42666
422
4

1
5
3
4
4

col. 2.

15345
60000
920700000

36
258
722
4883
155973
5114944
9626726
341515882
920700000
579699999
5796666
57999
577
5

1
5
8
8
2

15883 sinus *ek*; 15 · 21′ arcus *ek*.
90
105 · 21 arcus semidiurnus.

| Respice secundam figuram (Fig. 11). col. 3.

60000 · 42241
15479 ⁄

42241
15479
380169
295687
168964
211205
42241
653848439

542
65384|8439
10897

10897 linea *kl*, et est sinus altitudinis Solis distantis a meridie per 6 horas equales.

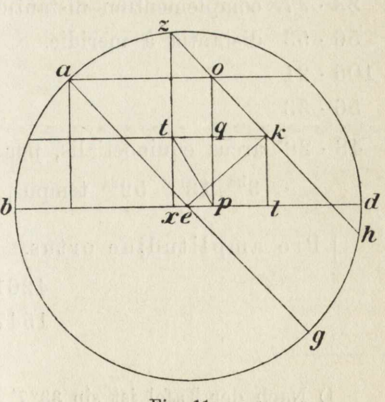


Fig. 11.

$\overline{33} \cdot 49'$ altitudo Solis considerata.

33392 sinus huius altitudinis, et est linea *op*
10897
22495 linea *oq*; $\overline{14} \cdot 57'$ arcus *dh*
45 · 15
60 · 12 altitudo Solis meridiana

col. 4. | 52066 sinus huius altitudinis
10897
41169 linea *zt*

41169 · 60000
22495/

22495
60000
1349700000

1
12
28
49
57
38855
43267
24951
3461394
116932784
1349700000
411699999
4116666
41111
411
4

3
2
7
8
4

32784 sinus complementi distantie Solis a meridie,

$\overline{33} \cdot 7'$ complementum distantie a meridie.[1])
56 · 53 distantia a meridie.
105 · 21
56 · 53
48 · 28 arcus equinoctialis, per quem ascendit in tempore ab ortu Solis.
3^{ha} 13ma 52^{2a} tempus, quod percurrit ab ortu Solis.

22 (12)[b], col. 1. | Pro amplitudine ortus.

42611 · 60000
15479/

1) Nach der Tafel ist sin $33^0 7' = 32781$.

	2 3	
	3 6	
	44372	
	3554135	2
15479	7389246	1
60000	186529315	7
928740000	928740000	9
	426111111	5
	4261111	
	42666	
	422	
	4	

21796 sinus arcus *eh*[1]; $\overline{21} \cdot 18'$ arcus *eh*, amplitudo scilicet ortus septemtrionalis.

Nunc pro arcu orizontis inter circulum altitudinis et meridiani.

$\overline{33} \cdot 49'$ altitudo Solis

$56 \cdot 11$ arcus *xn*, et est complementum altitudinis Solis.

49849 sinus *xn*.

$\overline{56} \cdot 53'$ distantia Solis a meridie, et est quantitas anguli *nzx*

50254 sinus huius distantie

57969 sinus *nz*.

49849 · 50254

57969 /

	14	
	45	
	1538	
	2796	
57969	5927	
50254	13984	5
231876	2291281	8
289845	12833639	4
115938	461722555	3
289845	| 2913174126	9
2913174126	298499999	
	4984444	
	49888	
	499	
	4	

col. 2.

58440 sinus anguli *nxz*.[2]

Cum autem hic sinus duos habeat arcus sive angulos, videndum primo

1) Hier ist wieder die Erhöhung um eine Einheit eingetreten. 2) Desgleichen

est, an angulus *nxz* sit minor recto aut maior eo, quod quidem docebit altitudo Solis in circulo orientis.

42241 · 15479
60000 /

	2	
	239	
	34623	
	56866	
	184287	2
15479	4367398	1
60000	184929124	9
928740000	928740000	8
	422411111	6
	4224444	
	42222	
	422	
	2	

21896 sinus altitudinis Solis in circulo orientis

$\overline{21} \cdot 30'$ altitudo Solis in circulo orientis.[1])

col. 3. | Cum autem altitudo Solis considerata excedat hanc, constat Solem iam transcire circulum orientis.

$\overline{76} \cdot 54'$ arcus *bm* quesitus.[2])

Hec de primo quesito.

Secundum interrogatum (Blanchini).

Quedam stella in $\overline{9} \cdot 15'$ Leonis, cuius latitudo septemtrionalis $\overline{57} \cdot 2'$: quero, si per alium calculum declinatio ipsius vere est $\overline{69} \cdot 35'$; deinde altitudinem eius ab orizonte hora 3 minuto 25 post ipsius separationem a linea meridiana.

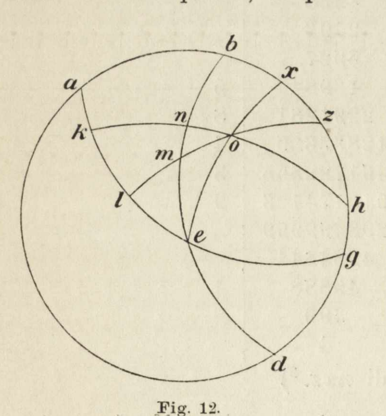


Fig. 12.

Ipse usus est modo Ptolemei, quamvis per tabulas suas primi mobilis computaverit. Igitur alium modum, quem querit, attentabo (Fig. 12).

Sit *aeg* medietas equatoris, cuius polus *z*, et *bcd* dimidia ecliptica, cuius polus *h*. Ponatur autem stella in medietate zodiaci descendenti, habens locum,

1) Nach seiner Sinustafel ist sin $21^0 30' = 21990$.

2) Hier ist der Sinus $= 58439$.

qui sit o. Ex puncto o ad colurum descendat perpendicularis ox aut eox et habebis per figuram sectoris:

39 · 15′ angulus ohx; 37962 sinus anguli ohx
57 · 2
32 · 58 arcus oh; | 32649 sinus arcus oh — col. 4.

60000 · 37962
32649 /

37962
32649
341658
151848
227772
75924
113886
1239421338

3
123942|1338
20657

20657 sinus ox; 20 · 8′ arcus ox[1])
69 · 52 complementum arcus ox
56334 sinus huius complementi; 57 · 2 complementum arcus oh
50339 sinus huius complementi; et est sinus arcus on.

56334 · 50339
60000 /

50339
60000
3020340000

4
25
37
1837
46488
575422
23363734
555858664
3020340000
563344444
5634333
56333
566
5

| 5 3 6 1 4

53615 sinus complementi arcus hx; 63 · 20′ complementum arcus hx[2])
26 · 40 arcus hx
| 23 · 34 — 23 (14)ª, col. 1.
3 · 6 arcus zx
86 · 54 complementum arcus zx.

59912 sinus huius complementi zx.

1) In der Tafel ist sin 20°8′ = 20652.
2) In der Tafel ist sin 63°20′ = 53618, die letzte Ziffer um eins erhöht.

60000 · 59912
56334 ⁄

59912
56334
239648
179736
179736
359472
299560
13 2
337508|2608
56251

56251 sinus complementi arcus *oz*; est autem et sinus declinationis quesite $\overline{69}$ · 38′ declinatio huius stelle[1]), sed ipse habet $\overline{69}$ · 35′.

Nunc pro altitudine huius stelle supra orizontem.

Accipe secundam figuram primi quesiti.

60000 · 42241
56251 ⁄

56251
42241
56251
225004
112502
112502
225004
53 3
237609|8491
39601

39602 linea *kl*, et est sinus altitudinis stelle in circulo orientis.

$\overline{45}$ · 15′
69 · 38
114 · 53
col. 2. | 180 ·
65 · 7 altitudo eius meridiana maxima. Hec enim stella non oritur, neque occidit.

1) In der Tafel ist sin 69° 38′ = 56249.

54430 sinus huius altitudinis meridiane
39602
14828 linea *zt*.
$\overline{45}$ ·
6 · 15′
51 · 15 distantia stelle a meridie
38 · 45 complementum huius distantie
37555 sinus huius complementi.

60000 · 14828
37555 /
14828
37555
74140
74140
74140
103796
44484
14
55686|5540
9281

9281 linea *oq*
39602
48883 sinus altitudinis stelle; $\overline{54}$ · 34′ altitudo stelle quesita.[1])

| Accipe autem distantiam eius stelle a meridiano in sinistriori parte· col. 3. Bonum fuisset etiam describere specialiter figuram, cum stella illa bis supra terram ad meridianum perveniat. Sed de hoc satis.

Tertium quesitum.

Quero duos numeros in proportione 5 ad 8, quorum multiplicatio equalis sit aggregationi eorum.[2])

1) In der Tafel ist sin 54° 34′ = 48887.

2) Das ist in moderner Bezeichnung:

Die erste Zahl sei x, dann verhält sich $5 : 8 = x : y$, also $y = \frac{8}{5} x$. Die beiden Zahlen sind also x und $\frac{8}{5} x$, folglich

$$\frac{8}{5} x^2 = \frac{13}{5} x, \quad \text{also}$$

$$x = \frac{13}{5} : \frac{8}{5} = \frac{13}{8} \qquad y = \frac{13}{8} \cdot \frac{8}{5} = \frac{104}{40} = \frac{13}{5}$$

Probe:
$$x + y = \frac{13}{8} + \frac{13}{5} = \frac{65 + 104}{40} = \frac{169}{40}; \qquad x \cdot y = \frac{13}{8} \cdot \frac{13}{5} = \frac{169}{40}.$$

Sit primus 1 ℨ.

5 · 8

1 ℨ / 1 ℨ $\frac{8}{5}$ ℨ

$\frac{8}{5}$ ℭ — $\frac{13}{5}$ ℨ

$\frac{13}{5}$ $\frac{8}{5}$ $\frac{13}{8}$ valor unius rei.

$\frac{13}{8} \cdot \frac{8}{5}$ (Der Punkt steht im Originale.)

$\frac{104}{40}$ valet $\frac{13}{5}$

Primus $\frac{13}{8}$, secundus $\frac{13}{5}$

Proba.

65	39	
104	13	bene stat.
169	169	
40	40	

col. 4.

| Quartum interrogatum.

Divisi 10 in duos, quorum maiorem per minorem divisi, item minorem per maiorem. Numeros quotiens coniunxi, et fuit summa 25: quero, que sint partes.[1])

---

1) In moderner Bezeichnung:

$$10$$

$$\frac{x}{10-x}, \quad \frac{10-x}{x}$$

$$100 - 10x$$
$$x^2 - 10x$$
$$x^2$$
$$\frac{2x^2 + 100 - 20x}{10x - x^2} = 25$$
$$250x - 25x^2 = 2x^2 + 100 - 20x$$
$$270x = 27x^2 + 100.$$

Durch 27 dividiert:
$$10x = x^2 + \frac{100}{27}$$

5	27 · 25
$25 - \frac{100}{27}$	135
	54
	675
	100
$575 : 27 = 21\frac{8}{27}$	$\frac{575}{27}$ davon die Wurzel

Eingeheft. Zettel (13)[a].

| 10

$\frac{1\ 𝔷}{10\ \overline{\text{ig}}\ 1\ 𝔷}$ $\frac{10\ \overline{\text{ig}}\ 1\ 𝔷}{1\ 𝔷}$

100 ig̅ 10 𝔷
1 ȼ ig̅ 10 𝔷
1 ȼ

$\frac{2\ ȼ\ \text{et}\ 100\ \overline{\text{ig}}\ 20\ 𝔷}{10\ 𝔷\ \overline{\text{ig}}\ 1\ ȼ} — 25$

250 𝔷 ig̅ 25 ȼ — 2 ȼ et 100 ig̅ 20 𝔷
270 𝔷 — 27 ȼ et 100.

Omnia per censum

$10\ 𝔷 — 1\ ȼ\ \text{et}\ \frac{100}{27}$

5		27
25 ig̅ $\frac{100}{27}$		25
		135
		54
1		675
138		100
575	$21\frac{8}{27}$	575
277		27 huius radix
2		

5 ig̅ Radice de $21\frac{8}{27}$, ecce valor rei,

5 et Radix de $21\frac{8}{27}$ secunda pars.

25 $\frac{575}{27}$

$$5 - \sqrt{21\frac{8}{27}} = x,$$

$$5 + \sqrt{21\frac{8}{27}} = 10 - x.$$

$$5^2 = 25 \quad \sqrt{21\frac{8}{27}}^2 = \frac{575}{27}, \quad \text{Differenz} = \frac{100}{27},$$

also ist der zweite Theil das vierte Binomium (Euklid's), und der erste Theil das vierte Recisum.

Regiomontan hat sich bei dieser Gleichung zuerst vielfach verrechnet. Er sagt selbst von sich „*precipitasti te*“, hat dann aber auf einem eingehefteten Zettel nochmals klar, deutlich und fehlerfrei das geschrieben, was ich habe drucken lassen.

$$\begin{array}{r} 675 \\ 575 \\ \hline 100 \\ \hline 27 \end{array} \text{ differentia qudratorum.}$$

Igitur secunda pars est binomium quartum, et prima pars recisum eius.

23 (14)[b], col. 2.

| Aliter.

Necesse est, quod duo numeri quotientes in se multiplicati unus in alterum producant unitatem.

Sit *ab* 10, *df* unitas; divisa *db* per *ad* exeat *de*. Fit ergo proportio *bd* ad *da* sicut *de* ad *df*, et coniunctim sicut *ba* ad *ad* ita *ed* et unitas ad unitatem. Quare quod fit ex unitate in 10, scilicet 10, equatur ei, quod fit ex *ed* et unitate in *ad*. Divide igitur 10 per *ed* et unitatem, scilicet per numerum quotiens cum unitate, et exibit *ad* (Fig. 13).

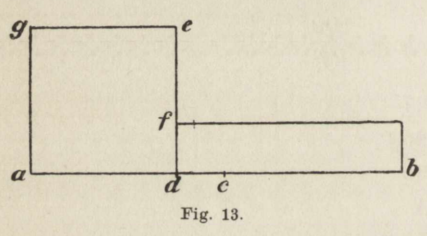


Fig. 13.

$$\frac{25}{2} \text{ in se; } \begin{array}{r} 25 \\ 25 \\ \hline 125 \\ 50 \\ \hline 625 \\ \hline 4 \end{array}; \text{ ab hoc subtraho 1.}$$

$$\frac{621}{4}, \text{ huius radix est } de.$$

$\frac{25}{2}$ $\overline{\text{ıg}}$ ℞ de $\frac{621}{4}$ primus quotiens; $\frac{25}{2}$ et ℞ de $\frac{621}{4}$ secundus quotiens.

$$\frac{10}{\frac{27}{2} \ \overline{\text{ıg}} \ \text{℞ de } \frac{621}{4}} \text{ prima pars;}$$

$$\frac{10}{\frac{27}{2} \text{ et ℞ de } \frac{621}{4}} \text{ secunda pars.}^{1)}$$

---

1) Regiomontan setzt $\frac{x}{10-x} = y$ und hat also die Gleichung $y + \frac{1}{y} = 25$, also $y^2 + 1 = 25y$, woraus $y = \frac{25}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{25}{2}\right)^2 - 1}$, also

$$y = \frac{25}{2} \pm \sqrt{\frac{621}{4}} \text{ folgt.}$$

Es folgen jetzt die Antwort BIANCHINI'S auf den zweiten Brief REGIOMONTAN'S und die Antwort des letzteren auf jenen Brief. Ihnen lasse ich wieder die auf sie bezüglichen Rechnungen REGIOMONTAN'S folgen.

IV.

Bianchini an Regiomontan.

| Ex Ferraria 1464, die 5. februari. 41(33)[a]

Responsiones ad quesita vestra sunt hec.

Primum quesitum est: Stella in g̃ 10 m̃ 25 Tauri latitudine carens, et alia in g̃ 27 m̃ 29 Tauri absque latitudine, tertia autem latitudinem habens septemtrionalem distat a prima per g̃ 6 m̃ 18, a secunda autem g̃ 20 m̃ 47: queritur verus locus et latitudo huius tertie stelle.

Hec propositio non videtur per demonstrationem terminari posse, nisi declaretur alterum duorum, latitudo scilicet huius tertie stelle aut locus ipsius in ecliptica, dato quod per 12^am^ et 13^am^ secundi[1]) inveniatur perpendicularis, sed in hoc non valet questio.

Secundum quesitum: Due stelle fixe ab ecliptica versus septemtrionem elongate, quarum latitudo unius est g̃ 9 m̃ 26, alterius vero g̃ 35 m̃ 53, et distantia inter corpora stellarum est g̃ 9 m̃ 45: queritur, quantum distent loca sua in ecliptica.

Propositio hec male posita videtur et impossibilis terminari. Nam si ab eodem puncto ecliptice per latitudinem declinantur, manifestum est, quod distantia inter corpora ipsarum erit g̃ 26 m̃ 27. Si vero adversis punctis ecliptice declinantur, necessario linea protracta a centro ad centrum prope ultimam sui curvatio longior erit quam g̃ 26 m̃ 27. Sed prius brevior ponitur, quod est impossibile, ergo videtur male posita.

∻ [2]) Tertium quesitum. Est circulus diametrum habens 60 pedum. Huic inscriptum est quadrangulum, cuius quatuor latera proportiones

---

Es ist also der erste Quotient $= \frac{25}{2} - \sqrt{\frac{621}{4}}$, der zweite $= 25 + \sqrt{\frac{621}{4}}$.

Die Rechnung ist aber so weiter geführt: Es ist $\frac{x}{10-x} = \frac{25}{2} - \sqrt{\frac{621}{4}}$, und daraus

$$x = \frac{10}{\frac{27}{2} - \sqrt{\frac{621}{4}}}$$ und ebenso $\frac{10-x}{x} = \frac{25}{2} + \sqrt{\frac{621}{4}}$, also $10 - x = \frac{10}{\frac{27}{2} + \sqrt{\frac{621}{4}}}$.

Dass diese beiden Werthe in umgekehrter Reihenfolge die in der ersten Lösung gegebenen sind, ist leicht zu beweisen.

1) Das ist der Geometrie des EUKLIDES.

2) Dieses Zeichen hat REGIOMONTAN zugesetzt. Man sehe dasselbe Zeichen oben in dem Briefe REGIOMONTAN'S neben Aufgabe 3.

habent, quantam illi numeri 4 · 7 · 13 · 17: queritur, quanta sit area huius quadranguli.

Si vero hec propositio presupponit latera quadranguli supra circumferentiam circuli, facilis erit hec conclusio per regulam ARCHIMEDIS aut ARSEMIDIS[1]) allegati per PTHOLOMEUM, sed si quadrangulum presupponitis ex lineis rectis, ut sint corde suposite arcubus, michi videtur impossibile pro libito linearum quatuor cordas suppositas quatuor arcubus includentibus superficiem proportionem inter se habentes pro libito compositoris, nec puto possibile esse, dare quatuor angulis contentis a quatuor rectis lineis 41(33)[b] ex diversis | proportionibus includentibus superficiem, et invenire commune centrum equidistantem illis quatuor angulis. Non est proportio inter cordam et cordam, qualis est inter circulum et circulum, nec est proportio numeralis inter costam et diametrum, prout 7[ma] decimi[2]) demonstrat.

Minime etiam videtur possibile, includere in spera piramidem sex diversorum laterum pro libito proportionalium, prout in quarto quesito dicitur. Nihilminus, si super hoc viderem demonstrationem, aquiescerem et libenter audirem solum de quadrangulo conclusionem, solumodo quantitas cordarum suppositarum toti circulo, que sint in proportione ut 5 · 7 · 9 · 12.

Quintum quesitum: Sunt duo numeri, quorum differentia est radix de 5, et quadratum (!) dictorum numerorum si multiplicantur alter in alterum, producentur 250: queritur, que sint illi numeri.

Manifestum est, quod productum numeri quadrati per numerum quadratum semper et omnino erit numerus quadratus. Sed 250 non est numerus quadratus: ergo impossibile est, quod productus duorum numerorum quadratorum constituat 250, igitur etc[a].

Sextum: Quidam mercator cum 100 ducatis in primo anno lucratus est aliquid; deinde in secundo anno cum capitali, id est cum 100 ducatis, et lucro primi anni lucratus est, proportionaliter ut in primo; tertio anno item cum capitali et duobus lucris annorum preteritorum proportionaliter lucratus est. Quo computato in universo ex capitali et tribus lucris coligit ducatos 265: queritur, quantum in primo anno lucratus sit.

Si hoc fecerimus per regulam argebre, proveniet, quod res, census et 42(34)[a] cubus equantur numero, et concluderetur quod 100 ducati cum lucro | primi anni secum lucrati sint radix cubica de 2650000 detractis ab ipsa radice 100. Sed multa similia per regulam argebre difficillime concluderentur, tamen in libro florum hec demonstravi et dedi regulam universalem ad omnem proportionem.[3])

1) Die korrumpierte Form des Namens ARCHIMEDES.

2) Geometriae EUCLIDIS.

3) Die Lösung ist richtig. Sie zeigt, dass man die Zinseszinsaufgaben da-

Septimo: Sint tres socii, qui communiter posuerunt 70 ducatos et lucrati sunt cum eis ducatos 20, quorum primo cedunt pro capitali et lucro ducati 15, secundo autem ducati 25, tertio etiam pro capitali et lucro ducati 50, et stat capitalis primi tribus mensibus, secundi autem quinque mensibus, et tertii stat 6 mensibus: queritur, quanta sit summa capitalis primi socii.

Hec propositio, prout ponitur, a me non intelligitur. Si enim 3 socii communiter posuerunt 70, videtur quilibet posuisse tertiam partem videlicet $23\frac{1}{3}$, et si primo cederunt ducati 15, ut ponitur, videtur perdidisse de capitali, et non lucratus esset. Deinde dicitur, quod pecunia capitalis primi stetit mensibus tribus, sequitur, quod alii socii, qui remanserunt, traficati sunt cum minori summa capitali quam ducatis 70, videlicet cum ducatis 55; similiter finitis 5 mensibus, quibus secundus socius extravit ducatos 25, tertius cum minori summa etiam traficatus est. Considerandum ergo est, quod cum minori capitali minus lucrum sequitur. Non intelligo opinionem quesiti, si melius non declaretur.

Octavo et ultimo queritur numerus, qui si dividitur per 17, remanent in residuo 15, eo diviso per 15 manent 11 in residuo, et ipsum divisum per 10, manent 3.

Huic quesito multe responsiones dari possent cum diversis numeris, qui propositionem concluderent, ut 1103, 3313 et alii multi. Sed in hoc non curo laborem expendere, in aliis numeris invenire.[1]) | 42(34)[b]

Et ut videre possit reverentia vestra, familiariter et domestice vobiscum loquor, et hoc, quia volo vos mecum similiter faciatis.

Prosequendo enim colationis gratia quero decisionem infra scriptorum dubiorum, videlicet:

1. Tres stelle sunt, ex quibus duo super eodem gradu ecliptice dicuntur esse, sed per latitudinem ab ipsa declinant versus septemtrionem, prima scilicet per g̃ 3 m̃ 25, secunda vero per g̃ 28 m̃ 48. Tertia autem stella ipsas sequens per longitudinem secundum successionem signorum videlicet in g̃ 6 m̃ 15 Geminorum cum latitudine g̃ 12 m̃ 9 septemtrionali, cuius distantia a prima stella per arcum orbis magni a centro ad centrum est g̃ 26 m̃ 40: queritur distantia ipsius a secunda stella atque loca prime et secunde stelle in ecliptica.

2. Ego divisi 100 per certum numerum, deinde divisi 100 per eundem

---

mals schon richtig zu behandeln verstand. Der *Liber florum Almagesti,* wie der volle Titel des Werkes von Bianchini hiess, ist nicht auf uns gekommen, wenn er sich nicht in irgend einer italienischen Bibliothek wiederfinden sollte.

1) Bianchini kennt also die allgemeine Lösung nicht, die in dem Antwortschreiben Regiomontan vollständig giebt.

divisorem sibi addito 8, et numeros cotientes prime et secunde divisionis aggregavi, et fuerunt in summa 40: queritur quantitas primi divisoris.

3. Quidam accessit ad campsorem cum 10 florenis, et ipsos cambiavit in grossos Venetorum, pro quibus accepit certos grossos. De qua summa extrassit 60 grossos et ipsos recambiavit in florenos ad eandemmet rationem, sicut primo fecerat. Hoc facto reperit, se habere communiter grossos et florenos 80: queritur precium florenorum ad grossos.

4. Quidam mercator in primo anno cum 100 ducatis lucratus est certum quid, prout in sexto quesito vestro dicitur, et sic procedit de anno in annum cum capitali et lucro lucrari in simili proportione sicut in primo. In fine autem sex annorum in universo inter capitale et sex lucris habuit ducatos 900: queritur proportio lucri primi anni.

5. Die 6° octobris prossime preteriti 1463 in hac regione vobis nota visa est stella de orizonte orientali distans per arcum orizontis a contactu | meridiani g̃ 60 m̃ 30, et hoc per horas 3 minuta 36 equales ante ortum Solis: queritur locus ipsius verus in ecliptica et latitudo ab ipsa.

43 (35)[a]

6. Duo circuli sunt. Primus videlicet habens diametrum 60 pedum, secundus vero habens diametrum 68 pedum. Qui secundus circulus supraponitur primo, diametrus supra diametrum, occupando de diametro primi 50 pedes: queritur quanta de superficie seu de area primi occupabitur.

7. Construxi tabulam de cordis et arcubus particularibus, et per doctrinam Ptholomei per viam mediationis, duplationis, copulationis et residui ex istis nullo modo perveniri potest ad inveniendum cordam unius gradus, nec in eternum perveniri potest. Dico autem, quod, si dividerimus angulum in tres partes equales, habebimus cognitionem corde uninus gradus et particulariter de omnibus aliis gradibus pro libito: quero igitur divisionem anguli continentis de circulo g̃ 60, qui arcus notus est, et cordam ipsius esse medietati diametri equalem. Sed tertia pars erit corda 20 graduum, quando possibilis est.

8. Tres socii sunt, et quilibet pro se habet denarios in marsupio. Duo vero primi absque tertio habent denarios 30, duo autem secundi absque primo habent denarios 42, et duo alii absque secundo habent denarios 54: queritur, quot denarios quilibet de per se habeat.

Et hoc volo sufficiant. Quantum ad regulas argebre, de quibus comprehendo, vos doctissimum esse, ego quidem in iuventute, dum operationem mercantium operarem, aliquantulum in hoc me delectavi, sed hoc in me venia facta sit. Nescio autem, quo facto hoc astrologica scientia magnopere delectatus sim, et inter meas occupationes, quas ex erario illustrissimorum dominorum meorum habui, causam adamandi et animum reficiendi per intervalla temporis spatium ad astrologie calculum me dedi et transtuli et

totis viribus conatus sum, ipsum reducere ad brevitatem et ad facilitatem calculandi, ex quibus aliquas tabulas construxi, in quibus calculus facilis seriose invenitur, in me | suscipiendo fere omne onus et difficultatem cal- 43 (35)[b] culandi, prout videre potueritis tam de motibus planetarum, quam de primo mobili et de eclipsibus. Vidi etiam certas rubricas per vos michi transmissas tabularum vestrarum, que mihi magnopere placuerunt, quia bene posite et necessarie sunt, et modos operandi tabulas ipsas intellexi, quia dicitis in angulo communi omnia reperire, ex quibus tantum comprehendo, multas tabulas necessario esse constructas. Et quia multa necessaria quesita occurrunt, ex quibus etiam oportet alias habere tabulas, puta, vidi tabulas vetustas pro inveniendo latitudines planetarum, in quibus intratur cum centro et cum argumento medio planetarum, et in angulo communi inveniuntur latitudines planetarum. Tamen primo oportet, habere tabulas inveniendi medii motus, auges, centra, et argumenta etc., et quilibet planeta de per se oportet habere tabulam. Sed inventio pulcherrima est: ego quidem construxi tabulam pro multiplicando et dividendo, in quibus multiplicanda de 10 minutis in 10 minuta, in angulo communi invenitur productus, in dividendi etiam, invento in parte superiori numerum divisorem et descendendo numerum dividendum, ipsius directo ad sinistrum inveniatur numerus cotiens, que operatio illis, quibus laboriosius est multiplicare et dividere, facilis redditur.[1] Non dico de capitulis tabularum mearum, quas vidistis grosso modo compositas, tamen fideliter composui et cotidie alias illis adiungo, quia exercitium illum valde mihi delectabilem occupationibus meis remedium optimum invenio.

In decisione quesiti vestri alias per me facta, quando dixi, stellam, que presuposita erat in g̃ 9 m̃ 15 Leonis mediare celum cum g̃ 20 m̃ 37 Virginis, dixi ipsam declinare ab ecliptica per latitudinem septemtrionalem g̃ 57 m̃ 2, et ab equinoctiali per declinationem g̃ 69 m̃ 38. Si autem dixi g̃ 69 m̃ 35, fuit error calami. Sed hec non curo. Quesivi autem a vobis, si per alium calculum | declinatio ipsa inveniebatur difformis ab 44 (36)[a] ista. Vos autem interlisistis, si per alium calculum perscruptari possetis declinationem ipsam, et subtiliter per tres figure sectoris demonstrationes notabiliter et bene ipsam conclusionem verificando decidistis eandem esse declinationem, et si intentionem quesiti mei exprimere non valui, modestie vestre patientiam queso, nam scio, quod per plures et quasi infinitas de-

1) Eine solche Tafel hat noch am Ende des XVI. Jahrhunderts Christoph Rothmann aus Bernburg berechnet. Sie findet sich im Msp. mathem. 4° 29 zu Kassel. Rothmann legt dort überhaupt eine Lanze für die Sexagesimalrechnung ein, bedient sich aber bei seinen trigonometrischen Rechnungen durchaus nur der nach Decimalrechnung gefertigten Tafeln.

monstrationes veritas elucescit, et specialiter per demonstrationes, que per figuram sectoris demonstrantur. Nam in tractatu, quem de floribus almagesti construxi, concluse sunt 150 diverse proportiones, ex quibus una ex duabus alliis componitur. Non dico de figura infrascripta per vos magistraliter lineata cum linea a centro coluri per centrum stelle protracta (Fig. 14), et concludendo dicitis, quod proportio *eb* ad *bn* componitur ex proportionibus *ex* ad *xo* et *oh* ad *hn*: dico etiam, quod proportio *ex* ad *xo* componitur ex proportionibus *hn* ad *oh* et *eb* ad *bn*. Item proportio *oh* ad *hn* componitur ex proportionibus *bn* ad *be* et *ex* ad *xo*, et similiter multe alie dari possunt. Et super hoc construxi tabulam seriosam precedentibus primo demonstrationibus. Dico etiam per lineam paralleliter protractam a centro coluri, per quam causatur triangulum *ea* et *ex*, scilicet *eax* dato puncto *o* distantiam a centro *e*, invenietur arcus *ok*, qui est declinatio scilicet Io. Blanchini. Item arcus *no*, qui est latitudo ab ecliptica. Item arcus *al*, que est declinatio vera etc., que non dubito in tractatu vestro de triangulis demonstrata per vos doctissimum sint.

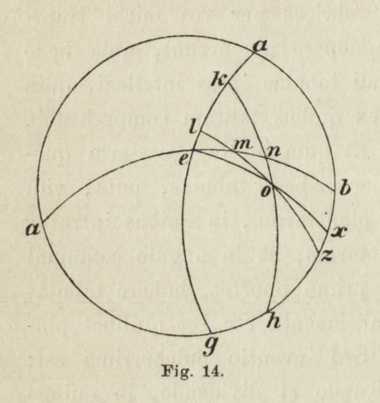


Fig. 14.

Cupio autem cum aviditate illum habere, quia in hac positione de triangulis non me tractavi | multum, dico in triangulis spericis, nisi quantum mihi visum est ad demonstrandam distantiam stellarum adinveniendam, et quia non dubito, tractatum ipsum e manibus vestris compilatum seriosum et copiosum esse. Valde ipsum gratum haberem solvendo scriptori mercedem. Regratior enim vobis de oblatione michi de ipso facta, quando in manu habebitis, et ego me offero, domino concedente, per quantum vires ingenioli mei se extendebunt, ipsum nomine vestro predicare et super ipsum ad vestri gloriam aliquid commentum fabricare.

44(36)[b]

Ad quesitum autem meum non bene expressum revertendum dico, quod, ut vobis notum est, invenire declinationem veram stelle ab equinoctiali maximum et quasi unicum fundamentum est in omnibus calculis astrologie, et ipso deficiente omne edificium super ipsum constructum in ruinam cadet. Vidi, per aliquos auctores doctrinam dari ad inveniendum declinationem stelarum habentium latitudinem, quorum doctrina est, accipere latitudinem stelle atque declinationem gradus ecliptice, in quo videtur stella esse, et si ambo sunt in eadem parte, septemtrionali scilicet aut meridionali, ipsas copulare, si vero una fuerit meridionalis, altera vero septemtrionalis, demere minorem a maiori, et quod post copulationem aut subtractionem perveniat,

elongationem stelle ab equinoctiali nominant, cuius dicunt accipiendum esse sinum. Nam prima fronte doctrina ipsa videtur falsa, quare arcus latitudinis et arcus declinationis quilibet procedit a suo polo, et sunt duo diversi arcus se secantes supra centrum stelle, nec ex ipsis solam sinus aut cordam accipi potest. Dicunt etiam, dictum sinum multiplicari debere per sinum aut cordam residui maxime declinationis, et productum dividere per sinum residui sciti complementi declinationis ecliptice, et hoc modo dicunt, declinationem veram stelle cum sua latitudine invenire. | Certe nescio hanc demonstrationem lineare, nec invenio Albategni ipsam demonstrasse, sed narrando regulam ipsam ultro concludit. Miror etiam de Ioanne Anglicano[1]) peritissimo et docto, qui in suo commento supra tabulas Toletanas per Arzachelem constructas hoc affirmat absque demonstratione, et propter hoc declarari a vobis volebam, si per aliquam demonstrationem hoc verificabatur, quia declinationes per hunc canonem invente notabiliter diferunt a declinationibus per tabulas per me constructas, et dico, quod omnes calculi actenus super hoc fundamentum facti male concludunt. Et hoc demonstravi in libro florum, atque narravi in tractatu de primo mobili, ubi dedi regulam ad hoc inveniendum et faciliter cum tabulis per me compositis, videlicet in tabula rubricata *„Tabula declinationis per arcum latitudinis secundum Io. Blanchinum“*, prout est linea *kn* secta per arcum transientem per utrosque polos zodiaci, et per *„Tabulam radicum“* etiam secundum me, in qua inveniantur ascensiones, ut arcus *ak*, cum quibus ad multas proportiones notabiliter et optime concluditur. Puta data est stella in g̃ 9 m̃ 15 Leonis cum latitudine g̃ 57 m̃ 2, et quero declinationem ipsius. Primo invenio declinationem ipsam in Tabula secundum Ioannem Blanchinum, quam invenio g̃ 18 m̃ 39 2̃ 30, quos subtraho de 90, restant g̃ 71 m̃ 20 2̃ 30, cum quibus in tabula magistrali prima invenio numerum corrispondentem 9675, quos ex parte scribo. Postmodum copulabo latitudinem cum supra scripta declinatione, quia sunt in eodem arcu et in eadem parte, eruntque in summa g̃ 75 m̃ 41 2̃ 30, quorum sinus per tabulas invenio in numeris 50138, quos multiplico per numerum supra salvatum, et producuntur secundum doctrinam canonum 56249 fere, ex quibus per tabulam sinus invenio arcum g̃ 19 m̃ 38, et hec est vera declinatio stelle. |

45(37)[a]

45(37)[b]

Quia preteritis diebus continue moram traxi Zure, ut alias vobis dixi, nec habui nuntium vobis transmittendi responsiones ad quesita vestra, namque ex mandato Illustrissimi D. mei die 2° instantis mensis huc ad offi-

---

1) Es ist das Johannes Ashenton, der um 1348 ein Buch beendete mit dem Titel: *Summa astronomica sive iudicialis de accidentibus mundi* gewöhnlich *Summa Anglicana* genannt.

cium meum veni, et presenti hora per veniam prefati Ill[mi] D. mei raptim literas istas egregio viro Tassino destinavi, ut vobis fideliter reddat, correptionibus vestris omnia subiacebunt.

Ex Ferraria, die V[to] februarii 1464 hora 3[a] noctis.

Totus vester Ioannes de Blanchinis.

46(38)[b]
[a] ist leer.

| Venerabili et doctissimo Viro
dm̃o Ioañi Germano R̸[mi]
dñi dño legati ꝛc[n].

V.

Regiomontan an Giovanni Bianchini.

47(39)[a]

| Ioannes Germanus ad Ioannem de Blanchinis Ferrariensem.

Accepi undecima mensis huius Februarii litteras vestras expectatissimas, doctissime vir, que non parum ceptam inter nos consuetudinem atque amicitiam adauxere et vobis mirum in modum obsquentem me reddidere, non modo quod meis respondeant litteris, verum etiam, quod doctiorem me in dies reddant et res occultas investigandi calcar adiiciant. Immortales igitur Dominationi vestre gratias habeo, que non cessat, Ioannem suum familiariter adoriri. Dabitis, spero, veniam, si responsionum sive decisionum vestrarum ad interrogata mea ex ordine meminero. Non equidem, ita me deus amet, animo superbiandi aut reprehendendi istic faxo, sed, ut veritas ipsa relucescat, conabor pro viribus circa singula aliquantisper immorari.

In primo quesito posui stellam unam in $\overline{10} \cdot 25'$ Tauri sine latitudine, item aliam in $\overline{27} \cdot 29'$ Tauri absque latitudine, tertiam vero habentem latitudinem septemtrionalem et distantem a prima per $\overline{6} \cdot 18'$, a secunda autem per $\overline{20} \cdot 47'$. Respondistis, si daretur alterum duorum, videlicet aut latitudo tertie stelle ab ecliptica, aut locus eius in ecliptica, reliquum quoque notum fieret. Verum illud dixistis et solueremus hoc per figuram sectoris aut per scientiam triangulorum spheralium faciliter. Quod ut lucidius accipiatur (Fig. 15), sit portio excliptice xq, prima stella sit in h puncto ecliptice, secunda

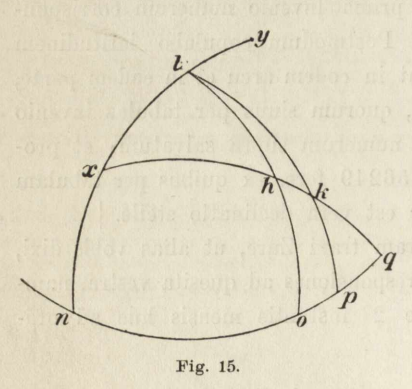


Fig. 15.

in k puncto eiusdem, tertia autem sit in l extra eclipticam, ita ut arcus lh sit $\overline{6} \cdot 18'$, arcus vero lk $\overline{20} \cdot 47'$. Super puncto l facto polo describo

circulum magnum in sphera, cuius arcus *nq* conincidat ecliptice in puncto *q*; polus ecliptice sit *y*, per quem et polum circuli *nq*, qui est punctus *l*, incedat circulus maior in sphera *yln* secans eclipticam in *x* et circumferentiam circuli supra *l* descripti in *n*, duoque arcus *lh* et *lk* continuantur, donec occurrant arcui *nq* in punctis *o* et *p*. Manifestum erit, unumquemque trium arcuum *ln*, *lo* et *lp* esse quartam circumferentie circuli maioris in sphera, itemque duo arcus *xq* et *qn* erunt quadrantes. Hec ex primo et secundo Theodosii de spheris aut ex primo Gebri Hispalensis[1]) clara trahuntur. |

Est autem arcus *xl* latitudo stelle tertie, qui si supponeretur notus, arcus quoque *xn* innotesceret. Cum autem proportio *ln* ad *nx* erit composita ex proportione *lo* ad *oh* et ex proportione *hy* ad *qx* (de sinibus intelligo), quinque autem horum sinuum noti sunt, arcus enim *ho* notus erit propter arcum *lh* datum, quare et arcus *hq* notus erit et residuus de quarta arcus *xh*. Cumque punctus *h* sit datus in ecliptica, erit et *x* cognitus, videlicet locus verus stelle *l*. Idem fieret si uteremur figura *lnqk*, concluderetur enim arcus *kx* cognitus, et inde punctus *x*. Si autem locus eius in ecliptisa esset datus, propter punctum *h* etiam datum cognosceretur arcus *xh*, et inde arcus *hq* residuus de quarta. Fieret, ut antea, proportio *ln* ad *nx* composita ex duabus proportionibus, scilicet *lo* ad *ho* et *hq* ad *qx* (de sinibus loquor). Omnibus autem notis preter arcum *nx* ipse quoque notus eliceretur, et hinc residuus de quarta *xl*, scilicet latitudo stelle. Quo autem pacto procederetur per scientiam triangulorum spheralium, si alterum duorum predictorum datum esset, silentio nunc pretereundum censeo, cum ad vos nondum venerint libelli mei triangulorum. Ubi enim eos videbitis amplior conversationis nostre dabitur materies. Sed cum neutrum duorum dictorum sit datum, videndum est, quonam modo ad quesitum perducamur. Triangulus *lhk* tria latera habet cognita, et nihil aliud cognitum est. Quod si unus angulorum eius quicumque esset notus, reliqui quoque innotescerent, et inde arcus *lx*, quemadmodum in tertio triangulorum demonstratum videbitis deo volente, notus redderetur cum arcu *xh*.[2]) Cumque ypothesis dederit punctum *h*, fieret et punctus *x* inventus, scilicet locus stelle *l* in ecliptica. Sed neque aliquis angulorum trianguli *lhk* notus supponitur. Quod igitur restat? In tertio triangulorum ex tribus lateribus trianguli spheralis cognitis tres angulos eius dimetiri doctum est,

47 (39)[b]

1) Hier also hat Regiomontan seine Bekanntschaft mit dem Werke Geber's deutlich ausgesprochen.

2) Daraus geht hervor, dass das III. Buch der Trigonometrie Regiomontan's erst ein späterer Zusatz ist, und das jetzige IV. Buch hier als drittes bezeichnet wird.

unde et reliqua, que commemorata sunt, nota fieri necesse est. Cum autem hisce mediis uti iam non liceat, aliam viam aggrediar. Respicite figuram *lokq*, ubi proportio *lo* ad *oh* componitur ex duabus, scilicet proportione *lp* ad *pk* et *kq* ad *qh* (sinus appello); proportio item *lo* ad *oh* componitur ex duabus, scilicet proportione *lo* ad *kp* et proportione *kp* ad *oh* (in sinibus semper versor), arcus autem *lo* equalis est arcui *lp*, quare | proportio *lo* ad *oh* componitur ex proportione *lp* ad *pk* et proportione *pk* ad *oh*. Ablata utrobique communi proportione *lp* ad *pk* manebit proportio *pk* ad *oh* sicut *kq* ad *qh*. Uterque autem arcuum *pk* et *oh* notus est propter sua complementa *lk* et *lh* per ypothesim data, quare proportio sinus arcus *hq* ad sinum arcus *qk* est data. Horum quoque arcuum differentiam notam subiecit ypothesis, arcum videlicet *hk* propter duo loca stellarum *h* et *k* data. Unde per unam conclusionem Ptolemei in capitulo 12° prime dictionis uterque arcuum *hq* et *kq* notus occurrat. Iam ad figuram *lnqh* revertendum. Proportio *ln* ad *nx* ex duabus constat, proportione *lo* ad *oh* et proportione *hq* ad *qx* (de sinibus dico). Omnia autem, ut brevior sim, nota sunt preter arcum *nx*, unde et propter argumentationem memoratam ipse non ignorabitur. Hinc arcus *xl* notus erit, qui est latitudo stelle ab ecliptica. Locum autem verum stelle *l* in ecliptica ex dictis facile est percontari. Oportet autem stellam *l* esse in $\overline{7} \cdot 25'$ Tauri cum latitudine septemtrionali $\overline{5} \cdot 31'$. Meminit autem dominatio vestra 12ᵉ et 13ᵉ propositione 2ⁱ Euclidis, ex quibus perpendiculares in triangulis planis rectilineis queruntur. Ego autem dictis propositionibus non utor, nam nihil loci habent in hoc meo proposito. Hec de primo.

47 (39)[c]

In secundo supponebantur due stelle habentes latitudines septemtrionales, una quidem $\overline{9} \cdot 26'$, alia vero $\overline{35} \cdot 53'$, et distantia inter centra stellarum erat $\overline{8} \cdot 45'$ etc. Vestrum responsum est, hanc positionem esse inpossibilem, et confiteor, me ex proposito ita supposuisse, ut intelligam, si apud vos esset Menelaus de sphericis figuris, in cuius tertio libro quinta propositio iam diu me suspensum tenuit. Quotquot reperio exemplaria, omnia in hac parte imminuta sunt. Alii vocant Mileum, ne nomen aliud vos persuadeat, alium esse librum, quam vos putatis, sed Menelaus vere dicitur, in cuius primo demonstratum est, quod cuiuslibet trianguli ex arcubus circulorum magnorum in sphera contentis duo quelibet latera tertio reliquo sunt longiora; penultima autem primi aut alie, que | de figuris planis rectilineis demonstrata sunt, conclusiones, proposito non serviunt. Impossibilitatem sic colligo: Sit arcus ecliptice *de* (Fig. 16), polus eius *g*, stella prima sit in *a*. Demitto a polo ecliptice per punctum *a* quadrantem *gz*. Aut igitur stella secunda est in quadrante *gz* aut extra eum. Si in eo sit *b*, erit arcus *zb* g̃ 35 m̃ 53. Sed arcus *za* est $\overline{9} \cdot 26'$, quare

48 (40)[a]

arcus *ab* erit g̃ 26 m̃ 27. Sed ex ypothesi oportet eum esse $\overline{8}\cdot 45'$, quod est impossibile. Si autem stella *b* fuerit extra quadrantem *gz*, ducatur a polo ecliptice alius quadrans per ipsam, qui sit *gh*, producto arcu *ab* erit itaque arcus *gb* $\overline{54}\cdot 7'$, arcus *ga* $\overline{80}\cdot 34'$ et arcus *ab* $\overline{8}\cdot 45'$. Duo ergo latera *gb* et *ab* trianguli spheralis *abg* coniuncta minora sint tertio, quod est impossibile. Si ergo ponetur arcus *ab* g̃ 32 m̃ 29 bene stabit possibile. Sed nolo, quod Dominatio vestra fatigetur querendo arcum *zh*, seu distantiam stellarum secundum longitudinem zodiaci. Labor enim multus est et iam planus ex eis, que super primo quesito commemorata sunt.

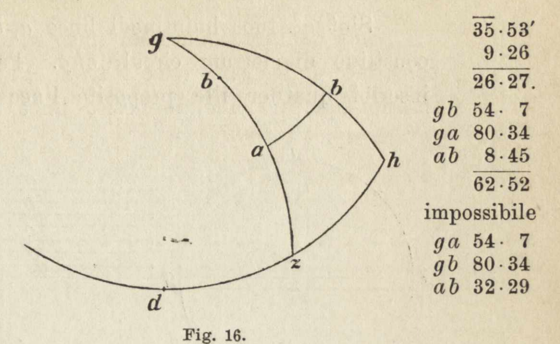


Fig. 16.

In tertio quesito ponebatur circulus habens diametrum 60 pedum, cui inscriptum intelligebatur quadrangulum latera quatuor habens in proportionibus horum numerorum 4 · 7 · 13 · 17 ·, et querebatur area huius quadranguli. Quadrangulum illud intelligebam rectilineum, nam si essent latera eius curva et super circumferentiam circuli dati, non diceretur quadrangulum, cum circumferentia circuli nullum admittet angulum. Revera hoc quesitum est satis arduum, quam ob rem paulo altius ordiendum arbitror, quo facilius expediri possit. Premitto autem has conclusiones. | 48(40)[b]

1. Omnis quadranguli plani rectilinei quelibet tria latera simul sumpta quarto reliquo sunt longiora (Fig. 17).

Sit tale quadrangulum *abgd*, cuius due diametri *ag* et *bd*. Dico, quod initio de eo verificetur presens conclusio. Sunt enim trianguli *abg* duo latera *ab* et *bg* per 20^{am} primi Euclidis longiora latere *ag*, itemque *ga* et *ad* latera trianguli *gad* simul sumpta longiora ipso latere eiusdem *gd*, tria igitur latera *gb* et *ba* et *ad* longe maiora sunt latere *gd*. Non aliter de reliquis omnibus lateribus predicabitur. | 49(41)[a]

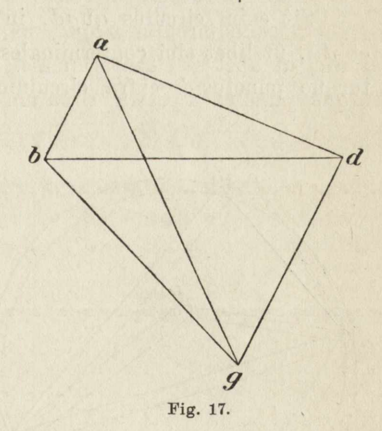


Fig. 17.

2. Ex omnibus quatuor lineis rectis, quarum quelibet tres simul iuncte quarta sunt longiores, possibile est fieri quadrangulum circulo inscriptibile (Fig. 18).

Sint quatuor huiusmodi linee *a*, *b*, *c*, *d*, quarum minima sit *a*, quam constituo diametrum circuli *ehg*. Palam, quod circulo *ehg* non possunt inscribi quatuor ille proposite linee conterminaliter, cum summa earum non sit minor diametro circuli *abg*. Sed et nemini dubium est, quin aliquis sit circulus ita magnus, quod si tres propositarum linearum aut eis equales posuerimus in eo tanquam cordas conterminales, et deinde quartam, remaneat arcus aliquis absque corda. Volo dicere, quod secundus terminus quarte linee et primus prime non conincidunt. Duos ergo constat esse circulos, quorum alteri quatuor date linee non possunt immitti conterminales propter nimiam eius circuli parvitatem, alteri vero non possunt hoc pacto inscribi propter nimiam eius magnitudinem. Necesse est igitur, cum sint infiniti circuli medii inter eos, ad aliquem pervenire, cui dicte quatuor linee possint inscribi. Hec certa sunt et intellectum faciunt quietum, quare ad alia me transfero.

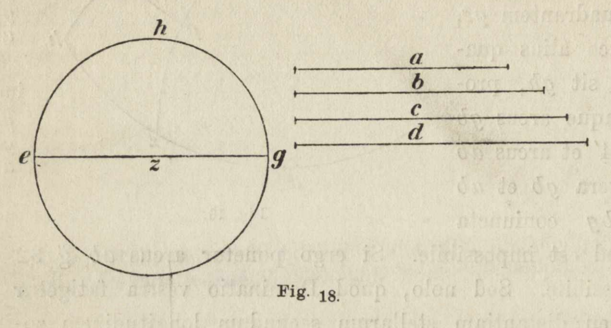


Fig. 18.

3. Non est necesse, omne quadrangulum rectilineum circulo esse inscriptibile (Fig. 19).

Sit enim circulus *abgd*, in quo ordinentur quatuor corde *ab*, *bg*, *gd* et *da*, ut libet sibi conterminales, quadrangulum *abgd* concludentes. Signeturque punctus *h* extra circulum in linea *gb* continuata, ducta linea *ah*. Dico, quod impossibile sit, quadrangulum *abgd* inscribi circulo. Si enim possibile est, esto per adversarium, ducaturque diameter *ag* communis ambobus quadrangulis. Duo itaque anguli *ahg* et *adg* ex confessione adversarii et 28[ta] tertii Euclidis duobus rectis angulis sunt equales. Sed et duo anguli *abg* et *adg* ex ypothesi et eadem 28[ta] tertii Euclidis duobus rectis equipollent: duo igitur anguli *ahg* et *adg* equabuntur duobus *abg* et *adg*. Ablatoque utrobique angulo *adg* relinqueretur angulus *abg* equalis

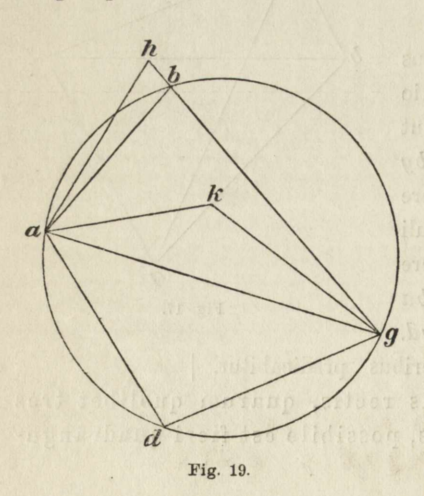


Fig. 19.

angulo *ahg*, extrinsecus intrinseco, quod est impossibile et contra 16^{am} primi elementorum. Ad | idem inconveniens redigeretur adversarius, si dixerit, quadrangulum *akgd* inscriptibile circulo. Posito *k* puncto in triangulo *abg* aut in altero laterum eius. Non est ergo necesse, omne quadrangulum rectilineum inscriptibile esse circulo, quod erat demonstrandum.

49 (41)^{b}

4. Omne quadrangulum rectilineum, cuius duo anguli sibi oppositi duobus equantur rectis, circulo est inscriptibile.

Quadranguli *abgd* rectilinei (Fig. 20) duo anguli *abg* et *adg* duos rectus valeant: dico ipsum inscriptum iri circulo. Ducta enim diametro quadranguli *ag* per 5^{am} quarti elementorum Euclidis licet, triangulo *agd* circumscribere circulum. Fiat igitur, et sit circulus huiusmodi *agd*, cuius circumferentia si transibit punctum *b*, habebitur intentum. Si non, ponatur *ab* indefinita ex parte *b*, quam necessario secabit circumferentia circuli *agd* aut supra *b* aut infra. Si supra, esto in puncto *h*, ductaque linea recta *hg* erit quadrangulum *ahgd* in circulo, unde ex 21° tertii elementorum duo anguli *d* et *h* duobus rectis equivalebunt. Sed et duo anguli *adg* et *abg* per ypothesim duos valent rectos, per communem ergo scientiam relinquetur angulus *abg* equalis angulo *ahg*, extrinsecus intrinseco, quod est impossibile 16^{a} primi ratiocinante. Idem et eodem modo inconveniens redundabit, si circumferentiam circuli *agd* quis dixerit secare lineam *ab* infra punctum *b*.

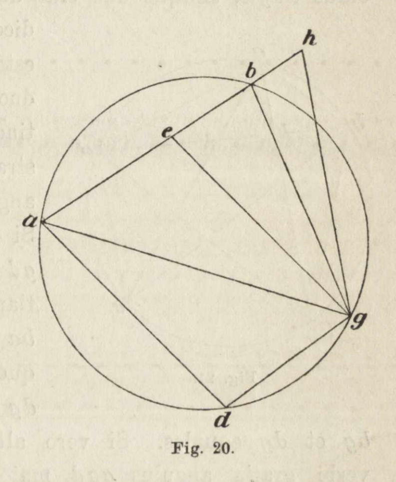


Fig. 20.

5. Proposito quadrangulo rectilineo, sitne inscriptibile circulo an non, explorare.

Utrique duorum angulorum quadranguli sibi oppositorum equalem constituens super puncto unius linee per 23^{am} primi elementorum, inde quoque, sintne equales duobus rectis an non, facile docebitur. Si igitur equales fuerint duobus rectis, quadrangulum ipsum circulo erit inscriptibile per primam partem 13^{e}. Si vero inequales, nullus circulus unquam ipsum circumscribet.

6. Quadrangulo, cuius duo invicem oppositi anguli duobus rectis equipollent, circulum circumscribere.

Sit tale quadrangulum *abgd*, cuius duo anguli *b* et *d* duobus rectis equivalent. Volumus circumscribere circulum. Ducta diametro *ag* ex processu antepremisse consequemur intentum.

7. Si in quadrangulo rectilineo, quod circulo inscribitur, due eius diametri producantur se secantes, erit proportio unius partis ad reliquam eiusdem diametri partem, sicut eius, quod sub duobus lateribus quadranguli huic parti 50(42)ª allateralibus | continetur, ad id quod sub reliquis duobus lateribus, alteri videlicet parti allateralibus continetur rectangulum (Fig. 21).

In figura clarebit facilius. Quadrangulo $abgd$ circumscriptus sit circulus $abgd$, sintque due eius diametri bd et ag secantes se in puncto h: dico quod proportio linee bh ad lineam hd est ut proportio eius, quod continetur sub duobus lateribus ab et bg ad id, quod continetur sub duobus ad et dg, cuius demonstrationi incumbendum est. Aut enim duo anguli bag et gad equales sunt aut non. Si fuerint equales, erunt et due corde bg et gd per 25^{am} et 28^{am} tertii equales. Per tertiam autem sexti proportio ah ad hd sicut ba ad ad, et talis etiam est proportio eius, quod sub gb et ba, ad id, quod sub ad et dg prima sexti arguente propter duas cordas bg et dg equales. Si vero alter dictorum angulorum altero maior sit, verbi gratia angulus gad maior angulo bag, fiat angulus ead equalis angulo bag ductis cordis be et de itemque ae secante cordam bd in k. Unde constabit, cordam ed equalem esse corde bg, item cordam be equalem ipsi gd. Erit enim angulus bae equalis angulo gad, angulo gae facto communi. Cum itaque angulus ead equalis positus angulo bag, duoque anguli abd et aed equales, quia in unum arcum ad cadant, erunt 32^{a} primi adiuvante duo trianguli abh et aed equianguli, quare per quartam sexti proportio bh ad ah sicut ed, et ideo bg ad ad. Similiter probabimus duos triangulos ahd et abe esse equiangulos, et ideo proportionem ah ad hd esse sicut ab ad be sive ad gd. Sed proportio ah ad hd componitur ex duabus proportionibus, scilicet proportione linee bh ad ha et proportione ha ad hd, quarum prima quidem est ut bg ad ad, secunda vero ut ab ad gd, ex quibus per 14^{am} sexti componitur etiam proportio eius, quod sub ab et bg, ad id, quod sub ad et dg, quare proportio bh ad hd est ut eius, quod sub ab et bg ad id, quod continetur sub ad et dg, et hoc erat concludendum.

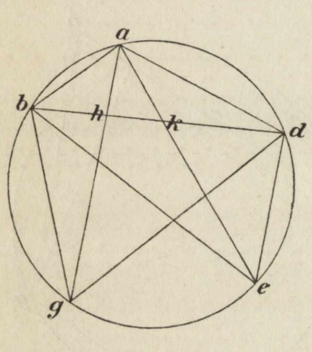


Fig. 21.

8. Datis quatuor lateribus quadranguli circulo inscripti proportio diametrorum eius inter se cognita veniet.

Resumpta priori figuratione sint date quatuor linee ab, bg, gd et ad: dico, quod proportio bd diametri ad ad nota erit. Erat enim ex precedenti bh ad hd sicut eius, quod sub ab et bg, noti propter ypothesin, ad id, quod sub ad et dg, notum similiter. Sic | proportio bh ad hd nota redditur, et ideo coniunctim proportio bd ad hd non erit ignota. Similiter per omnia probatur proportionem ag diametri ad gh fieri cognitam. Est autem gh ad hd data, quoniam sicut bh ad ah per 34[tam] tertii et 15[am] sexti, proportio igitur diametri ag ad portionem hd data fiet. Duorum itaque diametrorum bd et ag utraque ad lineam bh proportionem habet datam, unde necesario earum inter se proportio nota veniet, quod expectabatur lucubrandum. Nonnullos autem probationum locos allegare neglexi, cum nihil ambigui habeant, et in primo triangulorum unicuique plana occurrant.[1]) 50 (42)[b]

9. Si, quod sub duabus lineis proportionem notam habentibus continetur, rectangulum datum fuerit, utraque earum nota proclamabitur (Fig. 22).

Sint due recte hb et bg, quarum proportio nota, quadrangulum $bhge$ rectangulum et notum continentes: dico, quod utraque earum data invenietur. Prolongetur enim gb directe, donec ba fiat equalis ipsi bh, supra qua constituatur quadratum $dabh$. Erit itaque per primam sexti proportio ab

---

1) Der Gang seines Beweises, dass das Verhältnis der Diagonalen gegeben sei, ist folgender: Nach Satz 7 verhält sich

$$bh : hd = ab \cdot bg : ad \cdot dg \quad \text{und}$$
$$ah : hg = ab \cdot ad : dg \cdot bg,$$

also auch

$$(bh + hd) : hd = (ab \cdot bg + ad \cdot dg) : ad \cdot dg = bd : hd$$
$$(ah + hg) : hg = (ab \cdot ad + dg \cdot bg) : dg \cdot bg = ag : hg$$

Es ist aber wegen Ähnlichkeit der betreffenden Dreiecke

$$bh : ah = gh : hd$$

und daher auch

$$(ab \cdot bg + ad \cdot dg)\, bh : ad \cdot dg \cdot ah = bd : hg$$

und da auch

$$dg \cdot bg : (ab \cdot ad + dg \cdot bg) = gh : ag$$

ist, so folgt endlich

$$bd : ag = (ab \cdot bg + ad \cdot dg)\, bh \cdot dg \cdot bg : (ab \cdot ad + dg \cdot bg)\, ad \cdot dg \cdot ah.$$

Dass $bh \cdot dg \cdot bg = ad \cdot dg \cdot ah$ ist, giebt Regiomontan nicht an, es folgt aber sofort aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $ahd \sim bhg$. Der Beweis ist soweit gegeben, dass Bianchini mit Leichtigkeit die obigen Schlüsse durchführen konnte. Da aber nach dem Ptolemäus'schen Satze das Produkt der Diagonalen ebenfalls bekannt ist, so schliesst Regiomontan in Satz 9 u. 10 daraus, dass die Diagonalen einzeln bekannt sind.

ad *bg* sicut quadrati *db* ad parallelogrammum *hg*. Proportio autem *ab* ad *bg* est ut *hb* ad *bg* nota per hypothesim, unde proportio *db* quadrati ad spatium *hg* rectangulum nota elicietur. Est autem *hg* notum ex hypothesi, quare et quadratum *db* non ignorabitur. Hinc costa sua *bh* non latebit, cuius cum proportionem ad lineam *bg* subiecerit ypothesis, necessario et linea *bg* nota prosiliet.

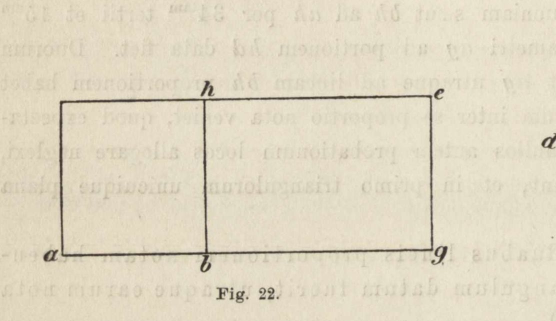


Fig. 22.

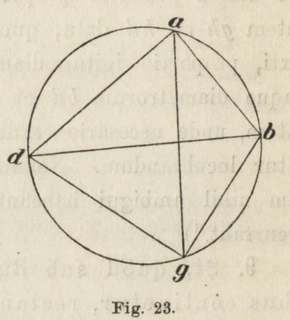


Fig. 23.

10. Quadranguli circulo inscripti quatuor latera nota habentis diametros quoque cognitum iri (Fig. 23).

Sit tale quadrangulum *abgd*, cuius due diametri sint *ag* et *bd*, latera autem quatuor eius data: dico, quod et diametri patefient. Erit enim per 8^am^ huius proportio diametrorum nota, quod autem sub diametris continetur, equum est his, que sub binis lateribus sibi oppositis continentur simul sumptis. Que autem sub binis lateribus continentur, nota sunt propter latera ipsa nota, unde et per precedentem utraque eorum cognita reddetur.

11. Datis quatuor lateribus huiusmodi quadranguli diametrum circuli sibi circumscripti invenere (Fig. 24).

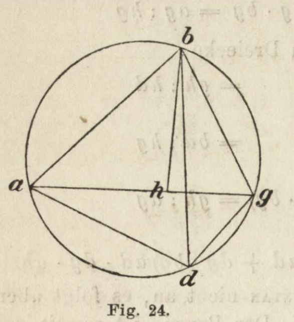


Fig. 24.

Repetita figura precedenti due linee *ab* et *bg* note habebuntur per ypothesim, ex precedenti autem et *ag* nota declarabitur. Triangulus ergo *abg* circulo circumscriptus diametrum ipsius circuli notam suscitabit, quod erat absolvendum. Plures autem cum sint modi ex tribus lateribus trianguli rectilinei notis diametrum circuli se circumscribentis invenire, eum eligo, qui ceteris est facilior et brevior apparet. A puncto *b* ad lineam *ag* demitto perpendicularem *bh*, quam | 51(43)[a] notam habebo propter latera trianguli *abg* cognita. Est autem proportio *bh* perpendicularis ad latus *ab* sicut lateris *bg* ad diametrum circuli *abgd*, cumque tres harum linearum sint note, diameter circuli non igno-

rabitur. Hunc autem modum diametri circuli inveniendi alibi demonstratum tradidi.[1])

12. Sed ne diutius equo detineamini, ad hoc quesitum respondere licet hoc pacto (Fig. 25).

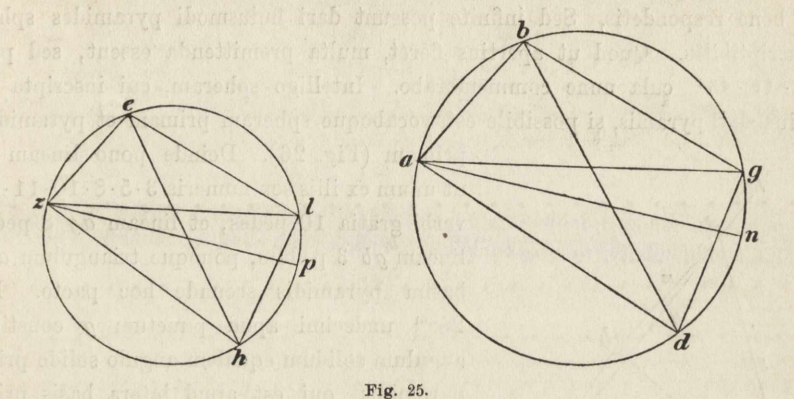


Fig. 25.

Cum sint date proportiones quatuor linearum, que claudere debent quadrangulum, pono pro libito lineam *ze* quotlibet pedum, et reliquas lineas *el*, *lh* et *hz* secundum proportiones datas et ut sit brevius, sit linea *ze* 4 pedum, linea *el* 7, linea *lk* 13 et linea *kz* 17 pedum. Possibile autem est per 2^am^ huius esse circulum, cui conterminaliter inscribantur hec quatuor linee, cum tres eorum quelibet quarta reliqua sunt longiores. Sit ergo circulus ille *zelk,* cuius diameter *zp* nota erit respectu linee *ze* per precedentem. Erit autem et area quadranguli *zelp* nota, quoniam ex 10^a^ huius diameter quadranguli *zl* nota habebitur. Sic uterque triangulorum *zel*, *zhl* tria habebit cognita latera, unde et utriusque area nota reddetur. Hinc quoque totius quadranguli area innotescit. Si igitur diameter *zp* circuli *zelh* esset 60 pedum, satis iam responsio pateret. Et si non fuerit 60 pedum ponatur linea *an* 60 pedum et fiat diameter circuli *abgd*, cui circulo inscribatur quadrangulum simile quadrangulo *zelh*, cuius rei dispositionem, cum et possibilis et facilis sit, pretereo. Quadrangulum tule sit *abgd*, ad cuius aream se habet area quadranguli *zelh* sicut quadratum diametri *zp* ad quadratum diametri *an*. Cumque tres harum quantitatum sint note, quarta quoque innotescet, quod erat absolvendum. Quod autem aree quadrangulorum similium et quadrata diametrorum circulorum, quibus quadrangula inscripta sunt, eandem habeant proportionem, nemini docto ignotum est. De hoc iam satis. Quo autem pacto numeris illud

1) *De triangulis* lib. II prop. XXIIII. Santbech'sche Ausgabe p. 49.

expediendum sit, ex commemoratis facile addiscetur, sed labor ingens et
51 (43)[b] diuturnus. |

Ad quartum respondetis, minime esse possibile includere in sphera pyramidem sex diversorum laterum pro libito proportionalium etc. Verum et bene respondetis, Sed infinite possunt dari huiusmodi pyramides sphere inscriptibiles. Quod ut apertius fieret, multa premittenda essent, sed pau-
3 · 5 · 8 · 10 · 11 · 13 cula nunc commemorabo. Intelligo spheram, cui inscripta est huiusmodi pyramis, si possibile est, vocaboque spheram primam et pyramidem primam (Fig. 26). Deinde pono lineam *ab* ut unum ex illis sex numeris 3·5·8·10·11·13, verbi gratia 10 pedes, et lineam *ag* 8 pedes, lineam *gb* 3 pedum, ponoque triangulum *abg* basim pyramidis secunde hoc pacto. Per 26^am^ undecimi apud punctum *g* constituo angulum solidum equalem angulo solido prime pyramidis, qui est apud latera basis prime pyramidis proportionalia duobus lateribus *ag* et *gb* trianguli *abg*. Oportet enim triangulum *abg* equiangulum esse basi prime pyramidis. Ductaque linea *gk* surgente a superficie trianguli *abg* sumatur ex ea *gd* pedum 11;

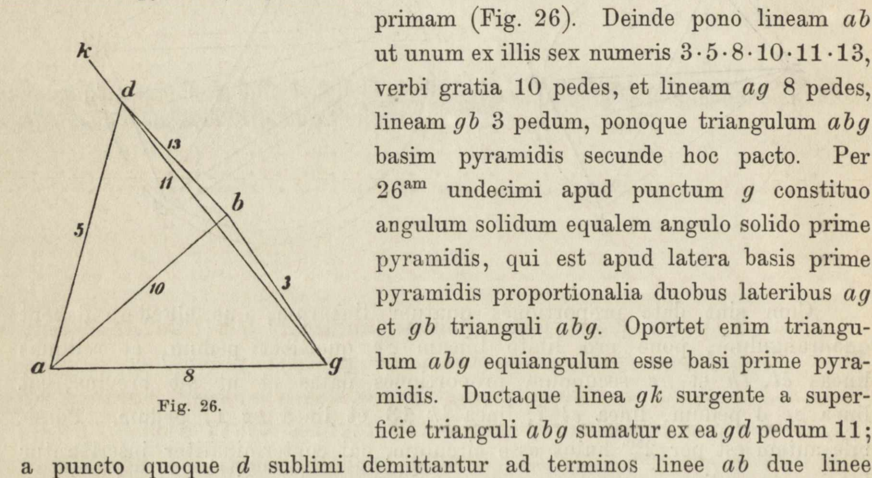


Fig. 26.

a puncto quoque *d* sublimi demittantur ad terminos linee *ab* due linee recte *da* et *db*. Iam confectam habemus pyramidem sex notorum laterum, eritque omnino similis prime pyramidi, licet fortasse non equalis eidem. Huic pyramidi secunde intelligatur sphera circumscribi, quam vocabo spheram secundam. Omni enim pyramidi basim habente triangularem sphera circumscriptibilis est. Hec autem omnia alibi demonstrata dedi. Si itaque ex notis lateribus pyramidis secunde inveniemus diametrum sphere se circumscribentis, quemadmodum possibile est et demonstratum, plana erunt omnia. Nam cubus circumscribens spheram secundam ad cubum, qui circumscribit spheram primam, est ut corpulentia pyramidis secunde ad corpulentiam pyramidis prime. Hec tenent propter similitudinem cuborum et pyramidum et habitudinem eorum ad spheram secundum inscriptionem et circumscriptionem. In his non moror. Si enim satis lucubrari deberem,
52 (44)[a] nimium prolixus evaderem; sed recta sunt omnia. | Modum autem metiendi corpulentiam pyramidis sex latera cognita habentis iam alibi conscripsi. Sic due cubi noti essent et corpulentia pyramidis secunde, unde et corpulentia pyramidis prime cognoscetur, essetque responsum satis ad hanc interrogationem. Sed profecto non facile est explorare, an ex sex lineis habentibus proportiones ut sex numeri dati sit constructibilis pyramis trilatera

propter variam combinationem huiusmodi linearum possibilem fieri, propter multas quoque passiones pyramidi trilatere convenientes. Sit enim huius explanandi gratia pyramis, cuius basis trilatera hkl et vertex n, quam claudant quatuor trianguli plani rectilinei et sex linee recte, que habebit quatuor angulos solidos ex novem superficialibus angulis resultantes. Cum itaque hec pyramis ex triangulis planis rectilineis consurgat, de quibus demonstratum est in vigesima primi, cuiuslibet eorum quelibet duo latera simul sumpta tertio reliquo esse longiora, item cuiuslibet anguli solidi ex tribus superficialibus angulis rectilineis contenti duos quoslibet superficiales simul sumptos maiores esse tertio, omnes autem tres coniuncti minores quatuor rectis, hoc ex vigesima et vigesimaprima undecimi, oportuit igitur in pyramide $abgd$ superius signata angulum agd et angulum dgb simul iunctos maiores esse angulo agb, itemque tres angulos superficiales in puncto g confluentes minores esse quatuor rectis. Hec omnia pensanda sunt, priusquam ad corpulentiam inveniendam descendatur. Modum autem inveniendi corpulentiam huiusmodi et inveniendi diametrum sphere circumscribentis ipsam pyramidem et cetera his rebus necessaria nunc preterire statui, ne fastidium pariam. De hoc nunc satis, nam, si ad plenum absolvere hoc quesitum vellem, duo quinterni vix sufficerent.

Velletis insuper scire quantitates quatuor cordarum conterminalium in circulo, quarum proportiones sunt ut hi numeri 5 · 7 · 9 · 12. Si ponetis diametrum circuli notam, ex supra dictis sufficienter trahetur modus operandi, quamquam laboriosissimus.

| In *quinto* quesivi duos numeros, quorum differentia esset radix quadrata de 5 etc. Quesivi duos numeros huiusmodi non in unitatibus, scilicet in actu tantum, sed in potentia etiam, si opus fuerit, quemadmodum vos respondistis ad sextum interrogatum, lucrum primi anni fuisse radicem cubicam de 2650000. Demptis ab ipsa radice 100. Hic enim in veritate non est numerus vulgaris. Ita etiam in questione mea satis erit determinare, quorum numerorum radices sint, quales queruntur. Huiusmodi enim numeris utuntur computatores algebre. 52(44)[b]

In *septimo* subieci, tres socios communiter posuisse 70 ducatos, et lucratos fuisse etc., non dixi eos equaliter posuisse, sed simul et communiter, in principio anni verbi gratia posuisse 70 ducatos ita, quod unus quisque posuerit partem suam. Sed completis tribus mensibus primus recepit de capitale suum cum lucro suo trium mensium, et invenit 15 ducatos. Sed duo capitalia duorum reliquorum steterunt amplius per duos menses ita, quod ambo in toto steterint per quinque menses. Quibus expletis secundus recepit capitale suum cum lucro, et collegit 25 ducatos. Amplius capitale tertii stetit per unum mensem ita, quod in toto stetit

per 6 menses, quibus expletis tertius invenit capitale cum suo lucro 40 ducatorum: queritur etc.

17 | 170
13 | 13
10 | 510
17
2210

In *octavo* bene reddidistis numerum quesitum minimum 1103, secundum autem 3313. Satis est, nam infiniti sunt tales, quorum minimus est 1103. Huic si addiderimus numerum numeratum ab ipsis tribus divisoribus, scilicet 17, 13 et 10, habebitur secundus, item eodem addito resultat tertius etc[a]. [1])

Hec de quesitis meis, ad que licet sufficientissime responderitis, libuit tamen circa ea paulisper immorari, quo sententiam meam planius acceperitis. Nunc ad interrogata vestra respondebo, quam paucissimis potero.

Primum erat illud: Tres sunt stelle, ex quibus due super eodem gradu ecliptice dicuntur esse, sed per latitudinem ab ipsa declinantes versus septemtrionem, prima scilicet per g̃ 3 m̃ 25, secunda vero per g̃ 28 m̃ 48, tertia autem stella ipsas predictas sequens secundum successionem signorum in g̃ 6 m̃ 15 Geminorum cum latitudine septemtrionali g̃ 12 m̃ 9, cuius distantia a prima stella per arcum orbis magni a centro ad centrum est g̃ 26 m̃ 40: queritur distantia ipsius | a secunda stella locaque prime et secunde in ecliptica (Fig. 27).

53(45)[a]

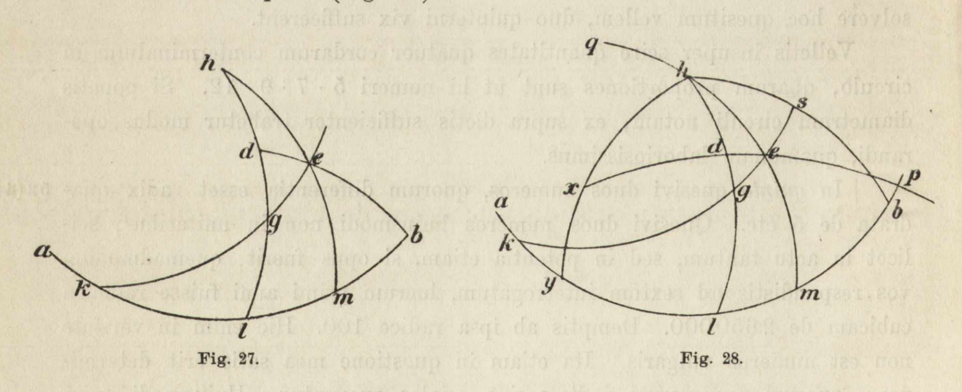


Fig. 27. Fig. 28.

Respondendo pono eclipticam *ab*, cuius polus septemtrionalis sit *h*, sintque due stelle prime *g* et *d* in quadrante *hl*, punctus autem *m* sit finis 6 graduum et 15 minutorum de Geminis, demissoque quadrante *hm* signetur in eo tertia stella per notam *e*, productis duobus arcubus circulorum magnorum *eg* et *ed*. Ex notis itaque arcubus *gl*, *dl*, *em* et *eg*, itemque

1) Hieraus in Verbindung mit der Randglosse ist klar, dass Regiomontan die vollständige Lösung dieses Problemes besass, wie denn zu seiner Lebenszeit dergleichen Aufgaben vielfach umliefen. In der vierten Abhandlung dieses Heftes wird man die Art der Lösung, welche das 16. Jahrhundert kannte, auseinandergesetzt finden.

puncto m dato queritur arcus ed cum puncto l. Quod ut fiat, continuetur arcus eg, donec occurret ecliptice in puncto k. Iam perducti sumus ad eam viam, qua superius in primo quesito meo utebar. Erit enim proportio hm ad me composita ex duabus proportionibus, scilicet arcus hl ad lg et ex proportione gk ad ke (de sinibus loquor). Unde concluditur proportionem sinus arcus ek ad sinum arcus kg esse tanquam proportionem sinus em ad sinum gl, cumque arcus eg datus sit, qui est differentia duorum arcuum ek et kg, erit per superius commemorata uterque eorum cognitus. Quod si per polum circuli ke, qui sit q, et polum ecliptice h circulum magnum produxerimus (Fig. 28), qui secet arcum ke satis prolongatum in puncto s, ipsam autem eclipticam in puncto b, erit unusquisque arcuum hb, ks et kb quarta circumferentie magne, fietque proportio kb ad bl composita ex duabus proportionibus, proportione sclilicet ks ad sg et proportione gh ad hl (sinus intelligo non arcus). Cum autem omnia sint nota preter arcum bl, est enim sg notus propter kg superius notum, similiter gh cognoscitur propter latitudinem lg notam ex ypotesi, quare et arcus bl non ignorabitur. Similiter per omnia invenietur arcus bm, si figura sectoris utemur $hbke$. Differentia igitur duorum arcuum bl et bm nota prosiliet, scilicet arcus lm, cumque punctus m sit notus, exit et l notus, locus videlicet primarum duarum stellarum, qui querebatur. Arcum autem ed metiemur, si prius eum extendimus ad partem puncti e, donec conincidat ecliptice in puncto p, ad partem autem puncti d, donec occurret circulo magno per polum ecliptice h et polum circuli de, qui sit t, transeunti, quod fiat in puncto x. Hic autem circulus per polos dictos incedens secet eclipticam in puncto y, eritque uterque arcuum px et py quarta circumferentie. Hec figuratio tenebit, dum arcus dp minor quadrante fuerit, nam si aliter eveniet, circulus per t et h polos transiens aut conincideret circulo hl aut secaret arcum dp. Sed argumentatio | parum variaretur. Redeamus igitur ad figurationem prescriptam, ubi proportio hd ad dl componitur ex duabus, proportione scilicet he ad em et proportione mp ad pl. Si ergo subtraxerimus proportionem he ad em ex proportione hd ad dl, que ambe note sunt propter terminos suos notos, relinquetur proportio mp ad pl cognita (de sinibus loquor). Cumque superius inventus sit arcus lm, qui est differentia duorum arcuum pl et pm, erit ex modo supradicto uterque eorum cognitus. Hinc et arcus lg innotescet. Est autem proportio py ad yl composita ex duabus, scilicet ex proportione px ad xd et proportione dh ad hl. Omnia autem nota sunt preter xd; est enim hd arcus notus propter latitudinem secunde stelle dl cognitam, unde et arcus xd invenietur cognitus. Similiter per omnia numeretur arcus xe ex figura $hype$. Demptoque arcu xd ex arcu xe relinquetur arcus ed, qui querebatur. Quod si

53 (45)[b]

figuratio aliter accideret, processus huiusmodi ad intentum paucis rebus mutatis nos traducet. Habeo insuper alios modos respondendi et breviores per scientiam triangulorum spheralium, quibus non libuit uti, donec videbitis libellos meos triangulorum. Usus autem sum figura sectoris, in qua profundissimam habetis intelligentiam, quatenus assumpte mea omnia confitemini. Oportuit autem ex vestra ypothesi duas primas stellas esse in gradibus 10 minutis 48 Tauri, tertiam autem stellam habere distantiam a secunda g̃ 28 m̃ 58, que querebantur.

Secundum quesitum. Divisi 100 per certum numerum. Deinde divisi 100 per eundem divisorem additis 8. Summa autem ex numeris quotiens resultabat 40: queritur quantitas primi divisoris.

Primus divisor fuit radix quadrata de $22\frac{1}{4}$ dempto ex ipsa radice $1\frac{1}{2}$, unde etiam secundus divisor fuit radix de $22\frac{1}{4}$ additis $6\frac{1}{2}$.

Tertium. Quidam accessit ad campsorem cum 10 florenis et ipsos campsit in grossos Venetorum, accipiendo scilicet pro eis certam summam grossorum. Ex qua summa dempserit 60 grossos, et ipsos recampsit in florenos secundum idem cambium ut prius. Quo facto reperit, se habere ex grossis et florenis coniunctis 80: queritur valor unius floreni ad grossos.

Unus florenus valuit radicem quadratam de $48\frac{1}{4}$ additis $6\frac{1}{2}$.

Quartum. Quidam mercator cum 100 ducatis in primo anno lucratus est certum quid, sicque procedit de anno in annum etc.; in fine autem sex annorum in universo ex primo capitali et omnibus lucris colligit 900 ducatos: queritur lucrum primi anni.

Hoc quesitum, licet simile sit interrogato meo ab inicio, tamen in fine redigit me ad scopulum maximum. Invenio enim rem, censum, cubum, 54(46)[a] censum de censu, cubum de censo et cubum de cubo equari numero. | Difficile igitur profecto videtur absolvere hoc quesitum. Si enim dixero lucrum primi anni fuisse radicem cubicam radicis cubice de 9000000000000 demptis ab hac radice 100, opus sine ratione certa faciam.[1]) Nunquam etiam de omnibus combinationibus numerorum algebre artem traditam invenio, ut si quis dixerit: 5 census de censu, tres cubos et 8 census equare 260 rebus et 50, quanta sit ipsa res, nondum habeo compertum. Ita in similibus et multis aliis combinationibus.

Hoc dico dominationi vestre, me reperisse nunc Venetiis Diofantem, arithmeticum grecum nondum in latinum traductum. Hic in prohemio

1) Nach italienischem Sprachgebrauche ist hier *radix cubica radicis cubicae* nicht die 9., sondern die 6. Wurzel. Die Lösung Regiomontan's ist völlig richtig. Die von ihm beispielsweise angeführte Gleichung würde in unserer Bezeichnung heissen $5x^4 + 3x^3 + 8x^2 = 260x + 50$. Die Wurzel liegt zwischen 3 und 4.

diffiniendo terminos huius artis ascendit ad cubum cubi. Primum enim vocat numerum, quem nostri vocant rem, secundum vocat potentiam, ubi nos dicunt censum, deinde cubum, deinde potentiam potentie, vocant nostri censum de censu, iterum cubum de censu et tandem cubum cubi. Nescio tamen, si omnes combinationes horum prosecutus fuerit; non enim reperiuntur nisi 6 eius libri, qui nunc apud me sunt, in prohemio autem pollicetur se scripturum tredecim. Si liber hic, qui revera pulcerrimus est et difficillimus, integer inveniretur, curarem eum latinum facere; ad hoc enim sufficerent mihi littere grece, quas in domo domini mei Reverendissimi didici. Curate et vos, obsecro, si apud vestros usque inveniri possit liber ille integer. Sunt enim in urbe vestra nonnulli grecarum litterarum periti, quibus solent inter ceteros sue facultatis libros huiusmodi occurrere. Interea tamen, si suadebitis, sex dictos libros traducere in latinum excipiam, quatenus latinitas hoc novo et pretiosissimo munere non careat.

Quesitum quintum. Die sexta octobris anni preteriti 1463^{ti} in hac regione visa est stella in orizonte orientali distans per arcum orizontis a contactu meridiani g̃ 60 et m̃ 30, et hoc per horas 3 minuta 36 equales ante ortum Solis: queritur locus ipsius verus in ecliptica et latitudo eius.

Quoniam due sunt contactus meridiani et orizontis, problema erit biceps. Sive ergo contactum meridionalem assumpserimus sive septemtrionalem, non mutabitur forma syllogismi. Ponatur ergo distitior a contactu meridionali, ideoque et propter ypothesim habuisse declinationem ab equatore meridianam. Ut breviter dicam et sine figuratione, quoniam vulgaris est, invenio arcum semidiurnum Solis g̃ 81 m̃ 34, et ideo Solem oportuit distare a meridiano per g̃ 135 m̃ 34 circumferentie paralleli sui. Sed ascensio recta Solis fuit g̃ 289 m̃ 51. | Posui enim Solem in g̃ 21 m̃ 31 Libre, quare ascensio recta medii celi fuit g̃ 154 m̃ 17; arcum autem semidiurnum stelle elicio g̃ 68 m̃ 17, unde ascensionem rectam respondentem puncto ecliptice, cum quo stella ipsa celum mediat, oportuit esse g̃ 242 m̃ 34. Punctus autem ecliptice huiusmodi erat finis 28^{i} minuti de primo gradu Virginis, cum quo videlicet stella celum mediare solet. Declinationem autem stelle meridianam prius inveni g̃ 20 m̃ 28. Ex puncto autem mediatoris celi et declinatione stelle planum est invenire locum eius verum in ecliptica cum latitudine sua. Hoc etiam in alio responso meo accepistis, quare nunc pretereundum censebam.

54 (46)[a]

Sextum quesitum. Duo sunt circuli, quorum primus habet diametrum 60 pedum, secundus vero 68, qui secundus ponitur supra primum ita, quod diametro unius supra diametrum alterius constituta occupantur 50 pedes ex diametro primi circuli: queritur, quantum de superficie eius occupetur.

Simile est in 6ta almaiesti capitulo 7°, nisi quod in hoc supposito corda communis duobus circulis predictis non secat distantiam centrorum, quemadmodum in figura Ptolemei videtur, sed cadit extra triangulum, quem claudunt duo diametri circulorum cum distantia centrorum suorum. Invenio autem post multam numerationem superficiem occupatam ex primo circulo pedum superficialium 1808 minutorum 30 et secundorum 7 fere. Fregi enim pedem in 60 minuta et minutum in 60 secunda, ut facilior esset et planior computatio fractionum. Usus sum proportione circumferentie ad diametrum 1554 ad 497. Hoc enim est minor tripla sesquiseptima, maior autem tripla superpartiente decem septuagesimas primas. Non tamen hec est vera proportio, sed veritati propinqua satis.[1])

Iubetur *septima* angulum, qui est tertia pars duorum rectorum, dividi in tres equales. Sunt certi modi id faciendi, quorum unum adduco (Fig. 29).

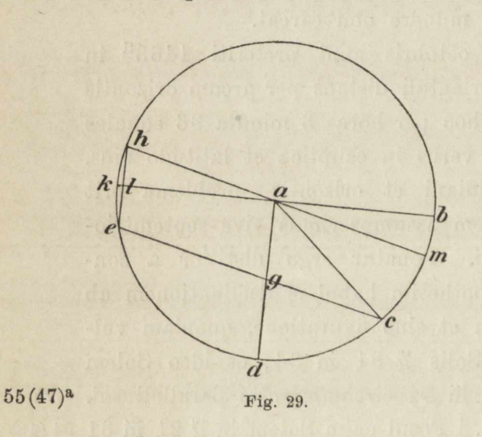


Fig. 29.

Sit angulus *bac*, qualis supponitur, duabus lineis *ab* et *ac* contentus, super cuius vertice *a* facto centro describo circulum *bcde* secundum quantitatem *ab*, in cuius circumferentia reperietur punctus *c*. Prolongo semidiametrum *ba*, donec futura diameter concurrat circumferentie circuli in *k*, supra quam ex centro *a* egrediatur orthogonalis *ad* semidiameter circuli. Intelligo deinde lineam rectam quandam terminari ad punctum *c* | indefinite quantitatis ex parte sinistra. Hanc lineam intelligo moveri circa punctum *c* immotum secando semidiametrum *ad* tamdiu, quod partio linee mote inter semidiametrum *ad* et circumferentiam circuli versus sinistram intercepta sit equalis semidiametro circuli *ad*. Sit ergo in hoc situ *ge* portio huiusmodi equalis ipsi *ad*, aut per modum Alhacen in quinto perspective sue, ubi punctum reflexionis in speculis sphericis determinare docet, a puncto *c* dato in circumferentia ducatur in circulo *bcde* corda *eg*, cuius pars inter *ad* positione datam et circumferentiam circuli intercepta sit equalis semidiametro *ad*. Quo facto ex puncto *e* oriatur corda *eh* secans diametrum circuli *bk* orthogonaliter in puncto *l*, ductaque diametro circuli per *h* punctum, que sit *hm*, ipsa dividet angulum *bac* in duos partiales *bam* et *mac*, quorum alter, scilicet *bam*, alterius medietas

55(47)[a]

1) Wie Regiomontan auf diese falsche Annahme gekommen ist, sehe man später in seinen Rechnungen.

est. Si ergo supra punctum *a* linee *am* constituerimus angulum equalem angulo *bam*, habebimus totum angulum *bac* divisum in tres equales. Sed redeo ad probationem huius. Cum uterque angulorum *ela* et *dal* sit rectus, similiter due linee *eh* et *ag* equedistantes, quarum summitatibus adiecte sunt due linee equales *ah* et *ge*, et uterque duorum angulorum *hag* et *egd* obtusus est, necessario due linee *ha* et *eg* sibi equedistabunt. Item arcus *eh* divisus erit per medietatem in *k*, et erit arcus *hk* equalis arcui *bm*, arcus vero *he* equalis arcui *mc* propter equidistantiam linearum *hm* et *ec*, quare angulus *cam* duplus erit angulo *mab*. Cetera facile concluduntur. Sed revera ex hoc nondum elicitur corda 20 graduum, nisi sciatur linea *ag*, quam secat *ce* ex semidiametro *ad*. Ipsa enim erit corda 40 graduum, que equalis est corde *eh*. Hinc corda 20 graduum cognoscitur, et tandem corda unius gradus cum reliquis adiutoriis. De hoc nunc satis.[1])

Octavum. Sunt tres socii, quorum quilibet per se habet denarios in marsubio. Primus et secundus habent 30; secundus et tertius habent 42; tertius autem et primus habent 54: queritur, quantum quilibet habuerit.

Multis modis hoc solvitur. Primus habuit 21, secundus 9, tertius 33.

Hec ad quesita vestra respondere breviter libuit. Quod autem dicitis, vobis placuisse problemata tabule mee, gratum habeo, et postquam completa erit, e vestigio dominationi vestre offeram. Tabula est unica, extensa secundum latus transversale ab uno gradu usque ad 90, et in latere descendente similiter ab uno gradu usque ad 90, ut videbitis. | 55 (47)[b]

Grandem ingeritis mihi libidinem videndi flores almagesti, quos compilastis, et alia opera vestra; utinam ea mihi esset conditio, ut ore potius quam calamo affari possem. Nihil quippe in mundo est, unde maior mihi iocunditas nasceretur. Quod autem pronunciatis, erroneum esse modum inveniendi declinationem stelle fixe per latitudinem, si quam habet, et declinationem veri loci eius in ecliptica, quemadmodum nonnulli operari solebant, et Albategni ipse precipit, bene philosophamini. Nisi enim stella ipsa fuerit in principio Cancri aut Capricorni, nunquam latitudo stelle et declinatio veri loci eius in ecliptica sunt in una circuli circumferentia, sed semper angulariter concurrunt, unde alterum alteri non licebit addere, ut unus arcus resultet, nec alterum ex altero demi. Non turbet nos sententia hoc pacto fieri iubentium, qui, etsi aliarum rerum doctissimi sint, in hoc

1) Diese Konstruktion ist genau diejenige, welche sich in der Ratdolt'schen Ausgabe des Euklides von 1482 findet. Da sie aber in den Handschriften der Campano'schen Übersetzung oder Bearbeitung fehlt, so ist es nicht nothwendig, dass Regiomontan dieselbe aus einer solchen kennen gelernt hat, wie Cantor in seinen Vorlesungen annahm. In dem Euklid-Manuskripte Regiomontan's in Nürnberg ist sie ebenfalls nicht enthalten.

tamen a veritate recedunt. Amor veritatis non cedat fame populari. Nemo demum nisi insanus viam certam sibi cognitam negligit, et viam per nebulas quasdam sibi monstratam amplectitur.

Iam more meo alia vobis mitto quesita, que mihi inciderunt respondenti interrogatis vestris.

1. Consideravit quidam altitudinem stelle unius g̃ 8 m̃ 36; deinde post parvum temporis notavit iterum altitudinem eius, quam invenit g̃ 13 m̃ 17; item tertio altitudinem eius invenit g̃ 25 m̃ 7. Duo autem arcus orizontis intercepti inter tres circulos altitudinum erant tanti: primus scilicet remotior a meridiano erat g̃ 10 m̃ 15, secundus vero g̃ 16 m̃ 43. Quero declinationem huius stelle fixe latitudinemque regionis, ubi facta est consideratio, itemque distantiam stelle a meridiano secundum gradus orizontis in prima consideratione.

2. In qnadam regione, dum in medio celi supra terram erant g̃ 7 m̃ 18 Geminorum, Sol distabat a meridiano versus orientem per g̃ 25 m̃ 13 de circumferentia orizontis. Angulus autem orientalis septemtrionalis, quem continebat circulus altitudinis Solis cum ecliptica, erat g̃ 125 m̃ 27. Quero locum Solis, altitudinem eius et distantiam eius a meridiano secundum equatorem, item latitudinem regionis, ubi facta est consideratio.

3. Stella quedam mediat celum cum 25 gradibus minutis 17 Leonis hoc pacto situata, quod arcus inter polum ecliptice septemtrionalem et stellam cum arcu inter polum mundi septemtrionalem et stellam coniunctim 56(48)[a] sunt equales semicircumferentie circuli magni. Quero | quanta sit declinatio huius stelle, quantaque latitudo, et in quo loco ecliptice sit secundum veritatem.

4. In quadam regione, dum in medio celi est 26[us] gradus Tauri completus, oritur quedam stella fixa in ecliptica existens, cuius distantia a contactu meridiani et orizontis meridionali est g̃ 129 m̃ 39: quero locum verum stelle, declinationem eius et latitudinem regionis.

5. Est quedam stella in principio Arietis latitudinem habens septemtrionalem; arcus autem paralleli eius interceptus inter stellam ipsam et eclipticam secundum successionem signorum procedendo est g̃ 75 m̃ 53: quero, quanta sit latitudo huius stelle.

6. Arcus ecliptice a principio Tauri sumens initium et citra principium Cancri terminatus equalis est ascensioni sue recte: quero, quantus sit arcus ille, et suppono pro voluntate maximam Solis declinationem 25 graduum.

7. Supposita item declinatione maxima g̃ 25 est arcus quidam ecliptice, qui coniunctus ascensioni sue recte facit summam g̃ 65 m̃ 16: quero, quantus sit ipse arcus ecliptice et quanta sua ascensio recta.

8. Item supposita maxima declinatione Solis 23 graduum exercitii

gratia, quero, quantus sit arcus ecliptice ab Ariete incipiens et citra Taurum terminatus, arcus inquam, cuius ad suam ascensionem rectam differentia maxima est possibilis.

9. Supposita declinatione Solis maxima g̃ 23 m̃ 28 est arcus ecliptice a principio Arietis incipiens et citra Taurum terminatus, qui quidem excedit ascensionem suam rectam in g̃ 2 m̃ 13: quero, quantus sit ille arcus ecliptice.

10. In eclipsi lunari futura hoc anno in aprili quero, quantum in principio eclipsis distet punctus contactus Lune et umbre ab altera duorum punctorum circumferentie Lune, supremo scilicet vel infimo, per que transit circulus altitudinis Lune in ipso eclipsis principio.

11. Item paulo post principium eclipsis, dum exlipsantur ex diametro Lune quatuor digiti et 37 minuta, quero, quanta sit portio spherica corporis lunaris immersa umbre. Et ut facilius fiat, pono umbram in loco transitus Lune sphericam, licet in veritate sit conoidalis. Semidiametrum autem huiusmodi sphere umbrose admitto eam, que ex tabulis trahitur.

12. In eadem eclipsi, dum eclipsantur 5 digiti superficiales, quero, quot digiti lineares eclipsantur. Digitum superficialem optime scitis esse duodenam partem superficiei vel circuli lunaris vel solaris, imaginando utrumque tanquam circulum.

13. In fine eiusdem eclipsis, imaginando circulum magnum transire per centra Lune et umbre, qui secabit circumferentiam orizontis veri in duobus punctis, quero distantiam alterius eorum punctorum a contactu meridiani et orizontis. Hic enim est punctus, ad quem vergit flexus tenebrarum in fine elipsis.

14. Duo simul considerant principium eclipsis lunaris, quorum uterque in loco suo notat altitudinem unius et eiusdem stelle fixe. Primus quidem reperit altitudinem eius g̃ 27 m̃ 13; secundus vero altitudinem eiusdem stelle g̃ 31 m̃ 29. Primus reperit distantiam huius stelle a meridiano suo g̃ 33 m̃ 14 secundum gradus orizontis; secundus autem distantiam huiusmodi a meridiano reperit g̃ 46 m̃ 23. Duo autem loca, ubi fiunt considerationes, distant a se 658 miliaribus, quorum 28800 sunt in toto ambitu terre: Quero altitudinem poli in utroque locorum, item declinationem huius stelle fixe considerate, et quantum duo ipsa loca considerationum differant secundum longitudinem ab occidente habitato.

15. Stella quedam fixa habens latitudinem septemtrionalem mediat celum cum g̃ 15 m̃ 26 Leonis, secundum veritatem autem est in 12 gradibus et 9 minutis Leonis. Arcus autem declinationis et arcus latitudinis in centro stelle concurrentes continent angulum 135 graduum et 20 minutorum: quero, quanta sit latitudo stelle huius, et quanta declinatio. Suppono declinationem maximam g̃ 26.

16. Item stella quedam mediat celum cum $\overset{\mathrm{g}}{}$ 7 $\overset{\mathrm{m}}{}$ 25 Virginis habens latitudinem septemtrionalem, cuius declinatio coniuncta latitudini sue facit summam $\overset{\mathrm{g}}{}$ 126 $\overset{\mathrm{m}}{}$ 17: quero locum huius stelle et latitudinem cum declinatione.

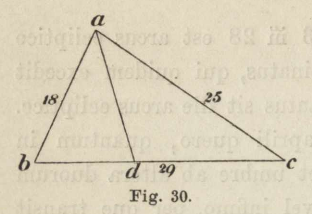


Fig. 30.

17. In triangulo abc (Fig. 30), cuius latus ab habet 18 pedes, ac pedes 25 et bc 29, produxi ex puncto a ad basim lineam ad hoc pacto, ut quadratum bd cum eo, quod fit ex da in ab, sit equale quadrato ab: quero quanta sit linea bd. Si dabitis lineam bd, dabo cordam unius gradus.[1])

240
114 · 87 · 39
97 · 56 · 3

18. Divisi 240 in tres numeros, quorum primum multiplicavi per 97, secundum per 56 et tertium per 3, productaque omnia collegi, et resultavit summa 16047: quero, quanti sint tres numeri partiales. Non admitto fractiones in hoc opere.[2])

19. Sint tres numeri quadrati inequales de medietate arithmetica, videlicet, quorum differentie sint equales, eorum autem radices quadrati | simul iuncte faciunt 214: quero, qui sint hi. Non admitto autem fractiones numerorum.[3])

57(49)[a]

20. Divisi 100 in duos inequales ita, quod radix quadrata minoris ducta in radicem cubicam maioris producat 25: Quero, qui sint huiusmodi numeri partiales. Admitto fractiones, admitto etiam numeros surdos, ut ita dicam, qualis est radix de 5.[4])

21. Tres numeri quadrati inequales coniuncti faciunt quadratum 4624, radices autem ipsorum coniuncte faciunt 116: quero, qui sint. Non admitto fractiones.[5])

22. In circulo sunt tres corde sibi conterminales, quarum una est 98347, proportio autem reliquarum duarum inter se est ut 5 ad 9. Quero, quanta sit utraque earum. Pono autem diametrum circuli 120000 perticas latum.

23. Item tres sunt corde conterminales, quarum una est 85639 par-

---

1) Vergl. hierzu Cantor, Vorlesungen II², S. 284.

2) Die Randglosse giebt die Lösung. Wie man sie fand, lehrt die 4. Abhandlung dieses Heftes. Die Gleichungen sind:

$$x + y + z = 240$$
$$97x + 56y + 3z = 16047.$$

3) Die Gleichungen sind:

$$x + y + z = 214; \quad x^2 - y^2 = y^2 - z^2.$$

4) D. h. $\sqrt{50 - x} \cdot \sqrt[3]{50 + x} = 25$.

5) $x^2 + y^2 + z^2 = 4624 = 68^2$
$x + y + z = 116$.

tium, differentia autem reliquarum duarum est 2579: quero, quanta sit utraque earum.

Sed nescio, quorsum evadit calamus, quem nisi restrinxero, carta deficiet. Alterum ex altero incidit, totque occurrunt pulcra problemata, ut incertus sim, que proponam, neque ab initio rebar, me tanta scripturum, presertim, ne tumultuose littere mee nimis equo obtunderent. Detis, obsecro, veniam calamo audaci et temerario. Ioanni enim scribenti veniam dari non opus est, cum et modestiorem videri sese velit, et omnibus in rebus libidini vestre obsequentissimum.

Multa (credite mihi) et iterum multa apud me habeo, que iudicio vestro submissa iri velim, si vacaret, que partim inventa sunt certissime, partim vero ancipiti pendunt et animum vehementer stimulant ad sui investigationem. Nam ut a suprema stellato orbe sermoni dem initium, qui hucusque materiam nostre suggessit conversationi, non possum non admirari socordiam astronomorum vulgarium nostre tempestatis, qui veluti mulieres credule, quicquid in libris sive tabularum sive canonum suorum offendunt, tanquam divinum quodpiam et immutabile acceptant; credunt scriptoribus et veritatem negligunt. Quid enim dicam de qualitate motus huius octave sphere, quam Ptolemeus noster clarissimus conclusit moveri in centum annis per unum gradum, Albategni vero post eum 743 annis in 66 annis fere per unum gradum. Declinationem maximam Solis hic reperit g̃ 23 m̃ 51 2̃ 20; ille vero g̃ 23 m̃ 35. Post eos Tebith | declinationem invenit maximam g̃ 23 m̃ 33 fere. Novitate igitur huius rei perculsus cogitare cepit, unde huiusmodi mutatio nasceretur, post multasque conclusiones, cum vidit eclipticam octave sphere variam habere inclinationem ad equatorem, conclusit, ut multa pretermittam, octavam spheram moveri non super polis fixis, sed motu quodam vario, quem vocant trepidationis motum etc. Hanc imaginationem acceptavit etiam Arzachel, compositor tabularum Toletanarum, et plerisque modernis hodie magis placet, quam ea qualitas motus octave sphere, que ex modo operandi per tabulas Alfonsinas traditur. Ego vero, utra earum veritati propinquior sit, non satis comperio. Scio tamen, utramque earum (pace melius iudicantium dixerim) esse mendacem. Si enim positioni Tebith creditur, oportuit declinationem Solis maximam tempore Ptolemei fuisse g̃ 23 m̃ 41; ipse autem invenit eam g̃ 23 m̃ 51 fere. Errasset ergo in minutis 10, et ideo in acceptione distantie intra duos tropicos errasset in 20 minutis, quod non est verisimile tantum virum tam sensibiliter deceptum esse. Nam si sic, fuisset etiam deceptus in introitu Solis in Cancrum et inde excentricitatem Solis et cetera erronea concludisset. Item tempore nostro oporteret declinationem Solis maximam esse g̃ 24 m̃ 2. Nos autem (preceptor meus et ego) in-

57 (49)[b]

strumentis reperimus eam g̃ 23 m̃ 28 fere. M. Paulum Florentinum[1]) et D. Baptistam de Albertis[2]) sepe audivi dicentes, se diligenter observasse et non reperisse maiorem g̃ 23 m̃ 30, que res etiam tabulas nostras, videlicet tabulam declinationis et ceteras, que supra eum fundantur, innovare persuadet. Argumentationes autem harum rerum alias, deo volente, videbitis certissimas. Quod si positione Alfonsine fidem habuerimus, cuius tabulis sive primis sive resolutis omnes moderni nostri utuntur, intelligite, que sequi oporteat. Primo enim ante omnia, maximam Solis declinationem tempore Albetegni oportuit fuisse g̃ 23 m̃ 45, quam tamen ipse diligens observator deprehendit g̃ 23 m̃ 35: error 10 minutorum, qui profecto sensibilis est. Tempore autem nostro declinatio Solis maxima esset g̃ 22 m̃ 47, quam instrumenta nostra prebent g̃ 23 m̃ 28: differentia 41 minutorum, error intollerabilis. Hoc fortasse non terreret quempiam, si solus ego rem hanc instrumento comperire tentassem, sed assunt viri doctissimi et fide digni Georgius[3]) bene memorie dominus preceptor meus, magister Paulus et D. Baptista supra memorati. Deinde concludo certissimis rationibus distantiam augis Solis a capite Arietis octave sphere tempore | Ptolemei fuisse g̃ 43 m̃ 35. Hanc distantiam invariabilem esse oportet, si verum est, quod motus augis Solis motum octave sphere insequitur. Sed eam distantiam in tabulis Alfonsinis habent g̃ 71 m̃ 25. Est autem differentia inter hos numeros g̃ 27 m̃ 50, unde nonnumquam in numeratione argumenti Solis erraremus in g̃ 27 m̃ 50, quibus apud augem excentrici respondet fere unus gradus de equatione Solis. Et ideo in computatione motus Solis veri erraretur in gradu uno fere, quod, quantum sit inconveniens in iudiciis dandis, in eclipsibus et ceteris rebus, nemo ignorare debet. Preterea Sole existente in principio Arietis ecliptice fixe secundum computationem distabit ab equatore versus septemtrionem in gradibus fere 6. Quomodo igitur situm Solis in equatore computare poterimus? Sed de his hactenus.

58 (50)[a]

Descendo ad spheras inferiores, Saturnum tamen et Iovem preterire libet, quod celi sui non tam inveterati sint (ut more quorundam loquar) quam Martis. Visus est Mars in celo, et computo differre per duos gradus per relationem ad stellas fixas et alias considerationes, nonnumquam differentia huiusmodi unius gradus et dimidii cernitur et quandoque multo minor. Quidam autem, imputantes hunc errorem radicibus mediorum mo-

1) Das ist Paolo dal Pozzo Toscanelli, geb. 1397, gest. 1482. Vergl. Boncompagni, *Bullettino* VII, 117.

2) Das ist der berühmte Baumeister Leon Battista Alberti 1404—1472, geb. zu Venedig, lebte er in Florenz. Vergl. Riccardi, Bibl. mathem. Italiana I, 17.

3) Natürlich Peurbach.

tuum, preter rationem defecerunt. Nam si in radicibus huiusmodi mediorum motuum tantummodo error esset, oporteret differentiam, que est inter locum computatum et locum verum, unicam invenire, quod non comperitur. Unde necessario estimandum est, eccentricitatem eius aut semidiametrum epicicli non prorsus recte inventas esse. Fieri tamen interea potest, ut revolutiones mediorum motuum aliquid erroris in tempore notabili immittant, sed et radices mediorum motuum etiam errorem ipsum augere, non potest negari. Longum tempus fluxit a Ptolemeo ad hunc diem, in quo medio tametsi Albategni et ceteri motus luminarium emendatiores reddiderint, reliquos tamen quinque erraticos intactos fere dimisere. Item si eccentricitas Martis est, quanta supponitur ab omnibus, et semidiameter epicicli similiter, sequitur arcum visualem maximam Martis ad arcum eius visualem minimam esse ut 52 ad unum fere. Credo ego, nemini unquam Martem tantum apparuisse aeris serenitate una et ceteris rebus eodem modo se habentibus. In Sole denique quomodo poterit esse certitudo computationis, si aliam declinationem eius maximam in tabulis scribimus, et aliam in celo instrumentis deprehendimus? Quod computi eclipsium mentiuntur, et in tempore durationis et quantitate partis eclipsate, itemque in principiis et finibus eclipsium, ideoque in veris applicationibus aut visibilibus, aut utrique luminarium imputabitur, aut Lune potissimum. Venerem denique | in celo tardiorem vidi, quam numeratio predixerat in tabulis, quartis unius gradus fere. Mendacium etiam in latitudinibus eius numerandis vitare est admodum difficile. Item stantibus fundamentis eccentricorum et epiciclorum oportet Veneris superficiem apud sensum quandoque apparere ut unum, alias autem ut 45, que res nemini aspicienti unquam innotuit. Item diameter eius visualis erit nonnunquam minuta 12 secunda 30, due scilicet quinte de diametro visuali Lune, quod quidem in celo nequaquam comprehenditur. Quid dicam de Mercurio, quem sepenumero apparere oportet in orizontibus nostris, si verum redderet tabula apparitionum et occultationum, que inter ceteras modernorum tabulas reperitur. Mercurius autem vel nunquam vel rarissime nobis apparet. Verum hoc inde procedit, quod tabula predicta non servit orizontibus nostris. Est enim composita a Ptolemeo in 10° capitulo 13° dictionis ad medium quarti climatis, quo vehementius inscitia eorum admiranda venit, qui eam tabulis suis interserverunt tanquam omnibus climatibus usuventuram. In Luna postremo tanta, tamque crebra redundat differentia, ut et populares hoc divinum astrorum studium mordaci dente lacerare occipiant. Notavi equidem in anno 1461° eclipsim, que fuit in decembri, cuius finis in celo precedebat finem computatum per horam integram. Et ut finis ille in celo certior haberetur, accepi altitudines duarum stellarum Alhaioth et Aldebaran in

58 (50)[b]

fine ipsius eclipsis, quatenus altera alteri testimonio esset. Alias etiam consideravi eclipses in tempore et quantitate partis eclipsate differentes multum a numeratione, de quibus alias latius dicendi locus erit. Quod si Luna habeat eccentrum et epiciclum, quemadmodum conclamatum est, oportebit, Lunam in certo situ quadruplo fere maiorem apparere quam in alio, rebus ceteris eodem modo se habentibus. De his iam satis.

Talibus rebus sepenumero vexor et deflere cogor segnitiem et frigiditatem nostre etatis. Profecto materia copiosa est volentibus hodie philosophari. Habemus ante oculos vestigia maiorum nostrorum, quo fit, ut cautius incedere possimus, modo ingenium huic rei accomodemus. Si ea mihi esset conditio, ut prope dominationem vestram vitam agere liceret, sperarem mille in huius modi rebus et solatia et fructus emoliri. Verum dominus meus Reverendissimus iturus est in Greciam in causa religionis christiane, ego autem ex dispositione sua in Italia remanebo. Vadant illi destructum Turcos, ego auxilio vestro et ceterorum amicorum celos reparare conabor. Pacem illi efficiant in rebus terrenis, nos curabimus rubiginem
59(51)[a] celestium orbium abstergere eosque ad semitas regias redigere, | ceteris in quiete pulsis timoribus vita concedetur transigenda nobis ocium philosophantium gloriam parimet perpetuo duraturam, quod adeo facilius atque abundantius ambobus nobis eveniet, quo Ioannem vestrum obsequentem humanius, ut soletis, amplectemini. Dum per ocium poteritis litteris meis reddere vices, virtus vestra hortabitur. Nunc valete feliciter et me, ut cepistis, amare non desinatis.

Totus Vester Ioannes Germanus.

Ne autem fastidium pariant multiplicationes et divisiones numerorum per numeros, sive etiam radicum extractiones, satis erit, circa unumquodque quesitum modum operandi perstringere. Quis enim nisi rudis omnino operationes numerorum ignorat? Ut igitur labor vobis minuatur, hoc pacto deinceps alterum alteri respondere licebit. Ubi tamen absque numerorum usu responderi non poterit, utemur pro libito numeris, ut res ipsa postulat.

Zu diesen beiden Briefen, mit denen der uns erhaltene Briefwechsel Regiomontan's mit Bianchini schliesst, gehören folgende ausführliche Rechnungen Regiomontan's.

24(16)[a], col. 1.

| **Quesitum meum.**

Est stella in g̃ 10 m̃ 25 Tauri latitudine carens, et alia in g̃ 27 m̃ 29 Tauri absque latitudine, tertia autem latitudinem habens septemtrionalem distat a prima per g̃ 6 m̃ 18, a secunda

autem per ğ 20 m̃ 47: queritur locus verus huius stelle cum latitudine.

Sit portio equatoris *bg* (Fig. 31), portio ecliptice *bm*, *b* principium Arietis, *h* prima stella, *k* secunda, *l* tertia extra eclipticam versus septemtrionem, arcus *hl* $\overline{6} \cdot 18'$, arcus *lk* $\overline{20} \cdot 47'$, queritur locus stelle in *l* collocati. Habes in figura 1ª triangulum *hkl* trium notorum laterum, unde concludas cetera. Sed quo res expeditior habeatur, absumo triangulum *hkl* confusionis tollende gratia.[1])

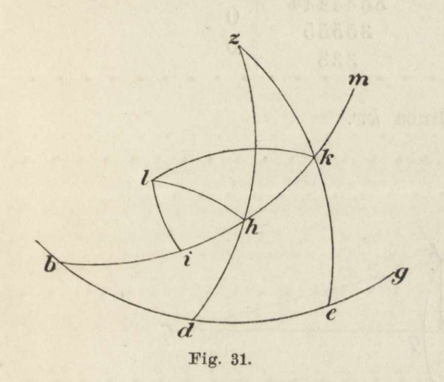


Fig. 31.

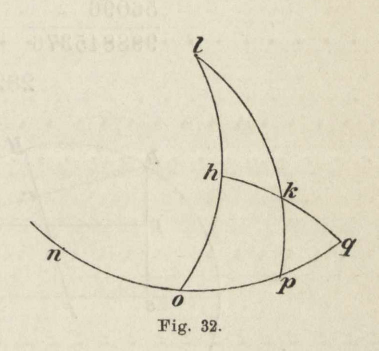


Fig. 32.

Supra polo *l* describatur circulus magnus in sphera (Fig. 32), cuius portio sit *nq*. Huic concurrat arcus *hk* prolongatus in puncto *q*.

$\overline{27} \cdot 29'$
10 · 25
17 · 4 arcus *hk*,
6 · 18 arcus *hl*,
20 · 17 arcus *lk*.
83 · 42 arcus *ho*; 59638 sinus arcus *ho*,
69 · 13 arcus *kp*; 56096 sinus arcus *kp*.

Est autem proportio sinus *ho* ad sinum *kp* sicut sinus *hq* ad sinum *kq* (Fig. 33).

$\overline{17} \cdot 4'$
8 · 32 arcus *hy*; 8903 sinus *hy*.
8903
17806 corda *hk*.
59638
56096
3542 linea *hv*.

1) Auch diese Aufgabe löst er, wie oben, nach Buch IV seiner Trigonometrie.

Est autem *hv* ad *vs* sicut *hk* ad *kx*.

3542 · 56096
17806 /

col. 2.

| 56096
17806
336576
448768
392672
56096
998845376

2112
357481
998845376
354222222
3544444
35555
333

| 2 | 8 | 2 | 0 | 0 | 0 |

282000 linea *kx*.

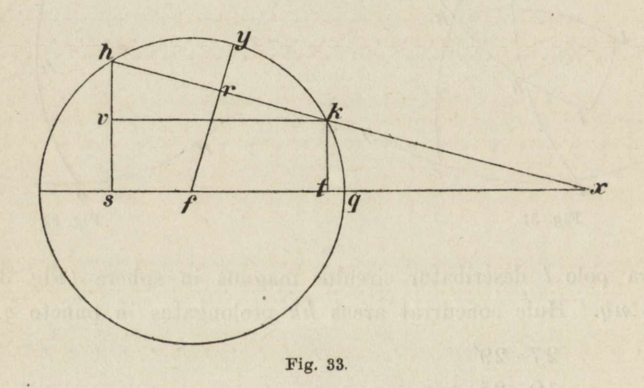


Fig. 33.

$\overline{8}$ · 32′
8 · 28 complementum arcus *hy*; 59336 linea *fr*

282000
8903
290903 linea *rx*

col. 3.

| 59336
59336
356016
178008
178008
534024
296680
3520760896 quadratum *fr*;

290903
290903
872709
2618127
2618127
581806
84624555409 quadratum *rx*.
3520760896
88145316305 quadratum *fx*.

```
45
11666
1 577436
141279548
42569772241
88145316305      2
4 8 2 6 8        9
5 9 3 7          6
5 9 3            8
5 9              9
5                2
```

col. 4

296893 linea fx.

296893 · 59336
60000 /

```
59336
60000
----------
3560160000

1
116
1422
29193
372318
1139139          1
29433623         1
591237337        9
3560160000       9
2968933333       1
29689999
296888
2966
29
```

21(16)[b], col. 1.

11991 linea fr, ut fx est 60000, et est sinus arcus anguli fxr.

$\overline{11}$ · 32′ angulus fxr[1])

78 · 28 angulus rfx, et tantus numeratur arcus yq

8 · 32

87 · 0 arcus hq

69 · 56 arcus kq; 56358 sinus kq.

Sinus kq ad sinum kp sicut sinus totus ad sinum anguli kqp.

---

1) 11991 ist in der Tafel eher der Sinus von 11°31′; denn sin 11°32′ ist nach ihr = 11996, dagegen sin 11°31′ = 11992.

56358 · 56096
60000 /

```
                              1
                              8
                            146
                            5683
                           41791
                          931278      | 5
    56906                54782328     | 9
       60000            858218442     | 7
    ----------         3365760000     | 2
    3365760000          563588888     | 1
                         5635555
                          56333
                           566
                            5
```

col. 2. | 59721 sinus anguli kqp; $\overline{84} \cdot 28'$ angulus kqp

5 · 31 complementum anguli kqp

5768 sinus huius complementi.

Sinus complementi arcus kp ad sinum complementi anguli kqp sicut sinus totus ad sinum anguli pkq.

21290 · 5768
60000 /

```
                          111
                          5221
                          7432
    5768                 13987          1
       60000           13414255         6
    ----------         34608000 | 0     2
    346080000          21299999         5
                         212222         5
                          2111
                           22
```

16256 sinus anguli pkq sive lkh; $\overline{15} \cdot 43'$ angulus lkh.[1])

Nunc redeo ad primam figurationem, in qua demitto ex puncto l perpendicularem arcum li ad eclipticam.

Sinus totus ad sinum anguli lkh sive lki sicut sinus arcus lk ad sinum arcus li.

1) In der Tafel ist sin $15^0 43' = 16253$

60000 · 16256
21290 /

16256
21290
1463040
32512
16256
32512

441
34699 | 0240
5768

| 5768 sinus arcus li; $\overline{5}$ · 31′ arcus li, et est latitudo septemtrionalis stelle quesita. col. 3.

84 · 29 complementum arcus li

59722 sinus huius complementi

$\overline{15}$ · 43′ angulus lkh

74 · 17 complementum anguli lkh

57757 sinus huius complementi.

Sinus complementi arcus li ad sinum complementi anguli lki sicut sinus arcus lk ad sinum arcus ki.

59722 · 57757
21290 /

21290
57757
149030
10645
14903
14903
10645
1229646530

13
51
6662
1132747
3574579 | 2
45255972 | 0
1229646530 | 5
597222222 | 8
5972222 | 9
59777
599
5

20590 sinus arcus ki; $\overline{20}$ · 4′ arcus ki [1])

17 · 4 arcus kh

3 · 0 arcus hi

| 40 · 25 arcus bh col. 4.

37 · 25 arcus bi.

1) In der Tafel ist sin 20°5′ = 20587.

Igitur stelle tertie locus erit in 7 gradibus minutis 25 Tauri. Ipsa quoque latitudinem septemtrionalem habebit graduum 5 minutorum 31.

Probatio huius. In triangulo *lih* rectangulo duo latera *li* et *ih* cognite sunt, quero tertium *lh*, scilicet distantiam duarum stellarum *h* et *l*, que si eveniet, quantum nunc supposuimus, procul dubio bene actum est. Est autem proportio sinus totius ad sinum complementi arcus *hi* sicut sinus complementi arcus *li* ad sinum complementi arcus *lh*.

$\overline{3} \cdot 0'$ arcus *hi*

87 · 0 complementum arcus *hi*; 59918 sinus huius complementi.

60000 · 59918
59722 /

59918
59722
———
119836
119836
419426
539262
299590
———
22
357842 | 2796
59640 |

59640 sinus complementi *lh*; $\overline{83} \cdot 43'$ complementum arcus *lh*
6 · 17 arcus *lh*.

Hic supponebatur gradus 6 minuta 18, differentia in uno minuto, quam ingessit condicio numeratoris. Nam sicut non utitur sinibus integris sive precisis omnino, ita dividendus numerus non semper tollitur totus etc.

25(17)[a], col. 1.

| Interrogata Domini Ioannis de Blanchinis.

Tres sunt stelle, quarum due in eodem loco ecliptice dicuntur esse, prima tamen earum habet latitudinem septemtrionalem g̃ 3 m̃ 25; secunda latitudinem habet g̃ 28 m̃ 48. Tertia autem stella dictas sequens secundum successionem signorum est in g̃ 6 m̃ 15 Geminorum cum latitudine septemtrionali g̃ 12 m̃ 9; habet autem hec tertia distantiam a prima secundum arcum circuli magni per centra transeuntis g̃ 26 m̃ 40. Queritur distantia ipsius a secunda stella atque locus prime et secunde stellarum in ecliptica.

Respondeo (Fig. 34).

Arcus *dh* ecliptice; *a* prima stella, *b* secunda, *g* tertia stella; *z* polus

ecliptice; *ag* arcus continuatus occurrat ecliptice in *d* puncto; *n* centrum circuli, semidiameter *nm* orthogonaliter secat cordam *ag*. In prima figura arcus *bs* perpendiculariter descendit ad arcum *zg*. Hinc collige syllogismum.

| 3 · 25′ arcus *ae*; col. 2.
28 · 48 arcus *be*;
12 · 9 arcus *gh*.

Primo video possibilitatem suppositi hoc est, an quelibet duo latera trianguli *zag* coniuncti longiora sint tertio reliquo.

86 · 35′ arcus *za*;
77 · 51 arcus *zg*;
26 · 40 arcus *ag*.

Bene stat.

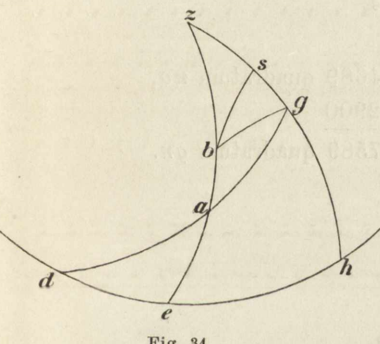


Fig. 34.

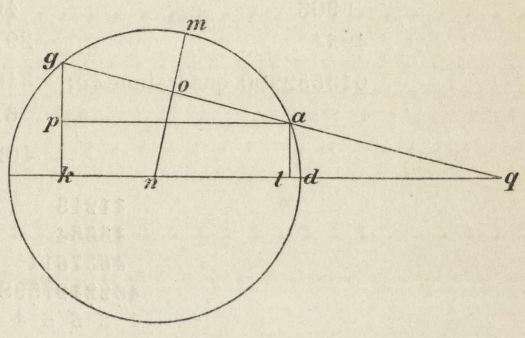


Fig. 35.

12628 sinus *gh* (Fig. 35)
3576 sinus *ae*
13 · 20′ dimidius *ag*; 13837 sinus arcus *am*,
27674 corda arcus *ag*
12628
3576
9052 linea *gp*, ut *al* est 3576

9052 · 3576
27674 /

| 27674	57		col. 3.
3576	2238		
	3959	1	
166044	44746	0	
193718	98962224	9	
138370	90522222	3	
83022	905555	2	
	9000		
98962224	99		

10933 linea aq ut ag est 27674.
13837

24770 linea qo

$\overline{13 \cdot 20'}$

76 · 40 complementum arcus am; 58383 sinus huius complementi, et est linea no

col. 4.

| 24770
24770
1733900
17339
9908
4954
613552900 quadratum qo;

58383
58383
175149
467064
175149
467064
291915
3408574689 quadratum no,
613552900
4022127589 quadratum qn.

11213
15554
4637611 | 6
4022127598 | 3
1 2 6 8 4 | 4
1 2 6 8 | 2
1 2 6 | 0
1 2
1

63420 linea qn.

63420 · 58383
60000 /

58383
60000
3502980000

239
2341
141537
362948
35189642
3502980000 | 0
63422222
634444
6333
66

5
5
2
3
4

25 (17)[b], col. 1.

55235 linea no, ut qn est 60000, | et est sinus anguli oqn,

$\overline{67}$ · 1′ angulus *oqn* [1]), ut quatuor recti sunt 360,
22 · 59 angulus *qno*, et tantus habetur arcus *dm*.
13 · 20
36 · 19 arcus *dg*,
9 · 39 arcus *da*,
3 · 25 arcus *ae*.
86 · 35′ complementum arcus *ae*; 59893 sinus huius complementi
9 · 39 arcus *da*
80 · 21 complementum arcus *da*; 58151 sinus huius complementi.

Sinus complementi *ae* ad sinum complementi *ad* sicut sinus totus ad sinum complementi *de*.

59893 · 59151
60000 /

	3	
	4	
	3	
	44	
	89 3	
	154999	5
59151	2621479	9
60000	15347571	2
3549060000	159451345 2	5
	3549060000	6
	598933333	
	5989999	
	59888	
	599	
	5	

59257 sinus complementi arcus *de*; $\overline{80}$ · 58′ complementum *de* [2]),
9 · 2 arcus *de*,
| 12 · 9 arcus *gh* col. 2.
77 · 51 complementum arcus *gh*.
58696 sinus huius complementi.
36 · 19 arcus *dg*.
53 · 41 complementum arcus *dg*.
48345 sinus huius complementi.

Sinus complementi *gh* ad sinum complementi *gd* sicut sinus totus ad sinum complementi *dh*.

---

1) In der Tafel ist sin $67^0 1' = 55237$.
2) In der Tafel ist sin $80^0 58' = 59256$.

58656 · 48345
60000 /

```
                          14
                          356 4
                          61938
                          273146
                          325518      4
48345                    1546131      9
    60000               586466688     4
----------             2900700000     5
2900700000              586566666     2
                          5865555
                          58666
                          588
                          5
```

49453 sinus complementi *hd*; $\overline{55}$ · 31′ complementum arcus *hd* [1]),
34 · 29 arcus *hd*,
9 · 2 arcus *de*
25 · 27 arcus *eh*, et tantus est angulus *bzg*

66 · 15
25 · 27
40 · 48 arcus a principio Arietis ad locum duarum primarum stellarum. Sunt igitur in $\overline{10}$ · 48′ Tauri.

col. 3. | Tandem pro arcu *bg* inveniendo.

$\overline{28}$ · 48′ arcus *be*
61 · 12 arcus *zb*; 52578 sinus arcus *zb*
25 · 27 angulus *bzg*; 25783 sinus anguli *bzg* sive *bzs*.

Sinus totus ad sinum anguli *bzs* sicut sinus arcus *zb* ad sinum arcus *bs*.

60000 · 25783
52578 /

```
      52578
      25783
     ------
     157734
    420624
   368046
  262890
 105156
 ----------
  13 23   |
 135561   | 8574
  22593   |
```

1) In der Tafel ist sin 58°31′ = 49457.

22594 sinus arcus *bs*; $\overline{22} \cdot 7'$ arcus *bs*.[1])

$\overline{22} \cdot 7'$ arcus *bs*.

67 · 53 complementum arcus *bs*; 55585 sinus huius complementi

28 · 48 arcus *be* sive complementum arcus *zb*; 28905 sinus huius complementi.

Sinus complementi *bs* ad sinum complementi *bz* sicut sinus totus ad sinum complementi *zs*.

```
                    55585 · 28905
                    60000 /
                             11128
                             66769
                            289955      | 3
   28905                 | 1734300000   | 1     col. 4.
        60000               5558555555  | 2
   ----------                5588888    | 0
   1734300000                 55555     | 0
                               555      |
                                5       |
```

31201 sinus complementi *zs*[2]); $\overline{31} \cdot 20'$ complementum *zs*.

58 · 40 arcus *zs*
12 · 9 arcus *gh*
77 · 51 arcus *zg*.
58 · 40
19 · 11 arcus *sg*
70 · 49 complementum arcus *sg*.

56668 sinus huius complementi

Sinus totus ad sinum complementi *sg* sicut sinus complementi *bs* ad sinum complementi *bg*.

```
60000 · 56668
55585 /
        56668
        55585
      -------
       283340
      453344
     283340
    283340
   283340
   -------------
     12541 |
    314989 | 0780
     52498 |
```

1) Nach der Tafel ist sin 22° 7′ = 22589.

2) Weshalb hier die letzte Ziffer erhöht ist, ist nicht einzusehen.

52498 sinus complementi *bg*; $\overline{61} \cdot 2'$ complementum arcus *bg* [1]),
$28 \cdot 58$ arcus *bg*.

26(18)[a], col. 1. | Tertia igitur stella habet distantiam a secunda $\overline{28} \cdot 58'$.

Hec de primo.

Secundum.

Divisi 100 per certum numerum, deinde divisi 100 per eundem numerum additis 8, et summa exeuntium fuit 40. Queritur quantitas primi divisoris.[2])

$$\frac{100}{1\ \text{ꝛ}} \qquad \frac{100}{1\ \text{ꝛ et } 8}$$

$$100\ \text{ꝛ et } 800$$
$$100\ \text{ꝛ}$$
$$\frac{200\ \text{ꝛ et } 800}{1\ \text{ȼ et } 8\ \text{ꝛ}} \text{ — } 40$$

$$40\ \text{ȼ et } 320\ \text{ꝛ — } 200\ \text{ꝛ et } 800$$
$$40\ \text{ȼ et } 120\ \text{ꝛ — } 800$$
$$1\ \text{ȼ et } 3\ \text{ꝛ — } 20$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4} \text{ addo numerum } 20\frac{9}{4} \text{ — } \frac{89}{4}$$

Radix quadrata de $\frac{89}{4}$ minus $\frac{3}{2}$ — 1 ꝛ

Primus ergo divisor fuit ℞ de $22\frac{1}{4}$ m̄ $1\frac{1}{2}$.

---

1) sin 61°2′ ist in der Tafel = 52494.

2) In moderner Bezeichnung ist die Rechnung folgende:

$$\frac{100}{x} \qquad \frac{100}{x+8}$$

$$100x + 800$$
$$100x$$
$$\frac{200x + 800}{x^2 + 8x} = 40$$

$$40x^2 + 320x = 200x + 800$$
$$40x^2 + 120x = 800$$
$$x^2 + 3x = 20$$

$$\frac{3}{2} \,\Big|\, \frac{9}{4} \text{ hierzu das von } x \text{ freie Glied, } 20\frac{9}{4} = \frac{89}{4}$$

$$\sqrt{\frac{89}{4}} - \frac{3}{2} = x, \text{ also war der erste Divisor } \sqrt{22\frac{1}{4}} - 1\frac{1}{2}.$$

Tertium.

Quidam accessit ad campsorem cum 10 florenis et ipsos campsit in grossos. Ex summa autem grossorum accepit 60 grossos, quos in priori cambio mutavit in florenos. Quo facto reperit se habere ex grossis et florenis 80: queritur, quot grossi valuerint florenum.[1])

Flor.	grss
1	1 ϰ
10	10 ϰ
	10 ϰ $\overline{\imath g}$ 60
1 ϰ · 1	$\dfrac{10\ ϰ\ \overline{\imath g}\ 60}{1\ ϰ}$
10 ϰ $\overline{\imath g}$ 60 ⁄	

---

1) Diese Rechnung lautet in unserer Bezeichnung:

1 Fl	x gr.
10 Fl	$10x$ gr.
	$10x - 60$ gr.

$$x : 1 = 10x - 60 : y. \qquad y = \frac{10x-60}{x}.$$

Man addiert also $10x - 60$ und $\dfrac{10x-60}{x}$

$$\frac{10x-60}{1} + \frac{10x-60}{x}$$

$$\begin{array}{r} 10x^2 - 60x \\ 10x - 60 \\ \hline 10x^2 + 10x - (60x + 60) \end{array}$$

$$\frac{10x^2 - (50x + 60)}{x} = \frac{80}{1}$$

$$80x = 10x^2 - (50x + 60)$$

$$130x + 60 = 10x^2$$

$$13x + 6 = x^2$$

$\dfrac{13}{2}$ aufs Quadrat

$$\begin{array}{r} 13 \\ 13 \\ \hline 39 \\ 13 \\ \hline 169 \end{array}$$

$\dfrac{169}{4}$, hierzu $6 = \dfrac{193}{4}$

$$\sqrt{\frac{193}{4}} + 6\frac{1}{2} = x.$$

Aus allen diesen Rechnungen ist klar, dass Regiomontan ein Gleichheitszeichen (einen längern horizontalen Strich) besass. Es ist wahrscheinlich, dass in obiger Art die Rechnungen damals überhaupt praktisch angeordnet wurden.

Colligo igitur 10 ꝛ īg 60 cum $\frac{10\ ꝛ\ \overline{\text{ig}}\ 60}{1\ ꝛ}$

col. 2.

| $\frac{10\ ꝛ\ \overline{\text{ig}}\ 60}{1}$ $\frac{10\ ꝛ\ \overline{\text{ig}}\ 60}{1\ ꝛ}$

10 ꝯ īg 60 ꝛ

10 ꝛ īg 60

10 ꝯ et 10 ꝛ īg 60 ꝛ et 60

$\frac{10\ ꝯ\ \overline{\text{ig}}\ 50\ ꝛ\ \text{et}\ 60}{1\ ꝛ} — \frac{80}{1}$

80 ꝛ — 10 ꝯ īg 50 ꝛ et 60

130 ꝛ et 60 — 10 ꝯ

13 ꝛ et 6 — 1 ꝯ

$\frac{13}{2}$ in se 13

13

39

13

$\frac{169}{4}$, huic addo 6 — $\frac{193}{4}$

Radix quadrata de $\frac{193}{4}$ et $6\frac{1}{2}$ — 1 ꝛ.

26(18)[b], col. 1.

| Quartum quesitum.

Quidam cum 100 ducatis in primo anno lucratur aliquid; deinde in secundo anno cum capitali et lucro primi anni lucratur proportionaliter, et ita continue usque 6 annos; in fine autem sex annorum colligit summam ex capitali primo et omnibus lucris 900 ducatorum: queritur lucrum primum.

100 · 1 ꝛ

1 ꝛ ⁄ $\frac{1\ ꝯ}{100}$

Habebis in 6 annis rem, censum, cubum, censum de censu, censum de cubo et cubum de cubo equales numero. Labyrinthus maximus.[1]

Quintum.

Die sexta octobris proximi preteriti anni 1463 in Ferraria, ut ita dicam, visa est stella in orizonte orientali distare per

1) Es ist hieraus klar, weshalb wir oben (S. 256) die *radix cubica radicis cubicae* nicht gleich $\sqrt[9]{\ }$ sondern $= \sqrt[6]{\ }$ gesetzt haben.

ortum orizontis a contactu meridiani per g̃ 60 m̃ 30, et hoc per horas 3 equales minuta 36 ante ortum Solis. Queritur locus ipsius verus in ecliptica et latitudo eius.

| $\overline{21}$ · 31′ verus locus Solis ad meridiem sexti diei octobris. col. 2.

$\overline{8}$ · 14′ · 5″
8 · 36 · 49
———
22 · 44
31 ·
———
11 · 22
8 · 25 · 27 declinatio Solis meridionalis.

Pro arcu semidiurno (Fig. 36).

$\overline{44}$ · 45′	latitudo loci considerationis;	42241	sinus *zb*,
45 · 15	arcus *ab*;	42611	sinus *ab*,
8 · 25	arcus *th*;	8782	sinus *th*,
81 · 35	arcus *hz*;	59354	sinus *hz*.

Composita:

42611 · 42241
8782 · 59354 — *x* —
60000 · *sinus te*

```
   42241            3
    8782           31
  -------         294
   84482        32679       8
  337928       54182717     7
 295687      | 370960462    0
337928         42611111     5
---------       426111
370960462        4266
                  42
```

8706 linea *x*.

Fig. 36.

col. 3

59354 · 8706
60000 ⁄

```
                               34
                             4 584
    8706                    1579288      8
         60000            522360000      8
    ---------             59354444       0
    522360000              593555        0
                            5933
                             59
```

8801 sinus arcus *te*; $\overline{8} \cdot 26'$ arcus *te* [1]),
81 · 34 arcus *at* semidiurnus.

3 ha 36 mi^ta^
45
9
54 · 0
81 · 34
135 · 34 distantia Solis a meridie, a medio celi in Solem computando.
289 · 51 ascensio recta Solis
135 · 34
154 · 17 ascensio recta medii celi hora considerationis.

col. 4. | Nunc pro arcu semidiurno stelle. Quoniam autem meridianus occurrit orizonti in duobus punctis, potuit interrogator ab utroque punctorum sectionis arcum suum computare. Sed ego limito me, tanquam stella habeat declinationem meridianam, et arcus orizontis computatus sit a puncto *b*.

$\overline{60} \cdot 30'$ arcus *bh*
29 · 30 arcus *he*; 29545 sinus *he*.

Concluditur autem, proportionem sinus totius ad sinum arcus *ab* esse tanquam sinus arcus *eh* ad sinum *th* declinationis stelle.

60000 · 42611
29545 /
42611
29545
213055
170444
213055
383499
85222
412
125894|1995
20982

20982 sinus *th*; $\overline{20} \cdot 28'$ arcus *th* [2]), et est declinatio stelle in *h* orientis.
69 · 32 complementum arcus *th*,
56213 sinus huius complementi
60 · 30 complementum *eh*,
52221 sinus huius complementi.

1) Nach der Tafel ist sin 8° 26' = 8800.
2) In der Tafel ist sin 20° 28' = 20980.

| Sinus complementi *th* ad sinum complementi *he* sicut sinus totus ad sinum complementi *te*. 27 (19)[a], col. 1.

56213 · 52221
60000 /

52221
60000
———
3133260000

```
         5
         6
        11
       1535
       2156
      23997   | 5
     4654559  | 5
    37166862  | 7
   622715913  | 3
  3133260000  | 9
   562133333
    5621111
     52222
      566
       5
```

55739 sinus complementi *te*; $\overline{68}$ · 17′ complementum *te*[1]),
21 · 43 arcus *et*.
68 · 17 arcus semidiurnus stelle, et est arcus *at*
154 · 17
88 · 17 ascensio recta puncti ecliptice, cum quo stella nostra celum mediat.
0 · 28 Virginis, huic respondet ascensio recta.

Igitur stella mediat celum in 28 minutis primi gradus Virginis, et habet declinationem meridianam $\overline{20}$ · 28′. Ex his autem constabit verus locus eius in ecliptica cum latitudine sua. In simili enim re alias responsum est.

| Sextum interrogatum.

col. 2.

Duo sunt circuli, primus habens diametrum 60 pedum, secundus vero 68, qui secundus circulus supraponitur primo, diametro quidem super diametro, occupando de diametro primi 50 pedes: queritur, quantum de superficie seu area primi occupabitur (Fig. 37).

Primus circulus sit *abgd* supra centrum *e*, secundus *agh* super centro *z*, quorum due diametri sint in linea recta *bh*, circumferentie autem eorum

1) In der Tafel ist sin 68°17′ = 55741.

secent se in duobus punctis *a* et *g*. Ducatur corda eis communis *ag* secans necessario diametros orthogonaliter in puncto *k* etc[a].

60 linea *bd*; 30 linea *ed*;
50 linea *dl*; 34 linea *zl*;
64 aggregatum diametrorum.
50
14 linea *ez*, distantia scilicet centrorum.

34		14
34		14
136	30	56
102	30	14
col. 3. 1156 quadratum linee *za*;	900 quadratum *ea*;	196 quadratum *ez*

900
196
1096,

cum itaque quadratum *za* sit maius duabus quadratis linearum *ae* et *ez*, erit angulus *aez* obtusus, et ideo perpendicularis *ak* cadet extra triangulum *aez*.

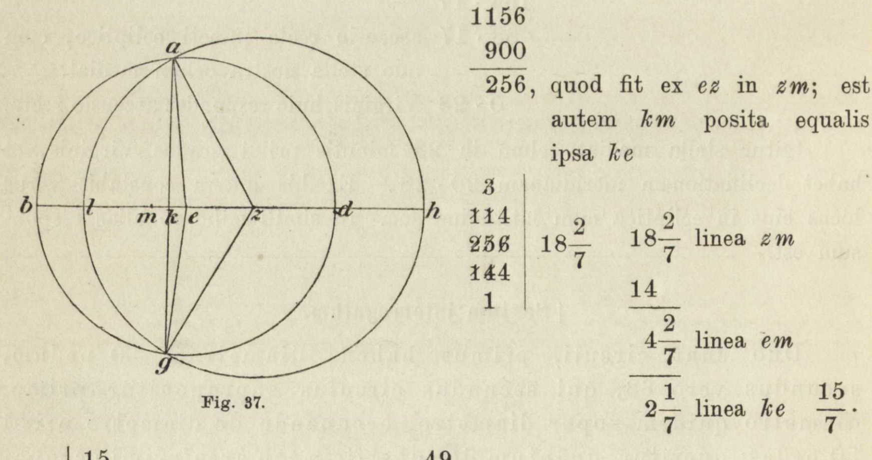


Fig. 37.

1156
900
256, quod fit ex *ez* in *zm*; est autem *km* posita equalis ipsa *ke*

3
114
256 | $18\frac{2}{7}$
144
1

$18\frac{2}{7}$ linea *zm*
14
$4\frac{2}{7}$ linea *em*
$2\frac{1}{7}$ linea *ke* $\frac{15}{7}$.

col. 4.

15	49
15	900
75	44100
15	225
$\frac{225}{49}$ quadratum linee *ke*;	$\frac{43875000000}{49000000}$ quadratum linee *ak*.

25
1371
225146
13666873
294842441
43875000000
4 0 8 8 2
4 1 8 9
4 1 8
4 1
4

| 2 0 9 4 6 3

49000000 | 7 0 0 0
1 4

209464 Radix quadrata numeratoris
7000 radix quadrata denominatoris

$\frac{209464}{7000}$ fere linea *ak*.

Nunc quero angulum *aeb*

27 (19)[b]. col. 1.

$| \; 30 \cdot \frac{209464}{7000}$

60000 /

209464
60000
12567840000

$\frac{12567840000}{7000}$, hic dividendus est per 30.

$\frac{12567840000}{210000}$, tanta est linea *ak*, ut *ea* est 60000.

1
1112
27948
1256784
211111
2222

| 5 9 8 4 6

59846 linea *ak*, ut *ea* est sinus totus 60000

$\overline{85} \cdot 54'$ arcus *ab*, ut tota circumferentia circuli *abgd* est 360.

$$3\frac{1}{7} \cdot 3\frac{10}{71}$$

$$\frac{22}{7} \cdot \frac{221}{71}\ ^{1)}$$

142 1547
142

$$\frac{1562}{497} \cdot \frac{1547}{497}$$

---

1) Hier hat Regiomontan $3 \cdot 71 = 211$ statt 213 gesetzt, wodurch die falsche Behauptung entstanden ist, es sei π näherungsweise $= \frac{1554}{497}$.

Dum igitur semidiameter circuli est 497, semicircumferentia eius est minor 1562 et maior 1547.

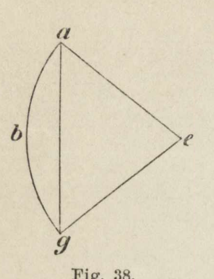


Fig. 38.

$$\begin{array}{r} 1562 \\ 1547 \\ \hline 15 \\ 1547 \\ \hline 1554. \end{array}$$

Dum ergo semidiameter est 497, circumferentia rationabiliter fere est 1554.

col. 2.

| 497 · 1554
30 /

$$\begin{array}{r} 1554 \\ 30 \\ \hline 46620 \end{array}$$

3
4
69
182
12599
46620
4977
49

$93\frac{57}{71}$ [1]) pedes, semicircumferentia circuli *abgd*.

$$\begin{array}{r} 93 \\ 30 \\ \hline 2790 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 71 \\ 30 \\ \hline 2130 \end{array}$$

2
44
621
2130
577
5

37

$$\begin{array}{r} 2130 \\ 37 \\ \hline 2167\frac{21}{57} \end{array}$$ area circuli *abgd* [2])

$180 \cdot \overline{89} \cdot 54'$

$2167\frac{21}{57}$ /

Ut fiat facilius, reduco primum et secundum ad minuta.

10800′ primus,

5154′ secundus,

$$\begin{array}{r} 2167 \\ 57 \\ \hline 15169 \\ 10835/ \\ /21 \\ \hline 123540 \\ \hline 57 \end{array}$$ tertius.

1) Im Manuskripte steht $\frac{71}{57}$.

2) Es müsste heissen $\frac{2790}{\frac{37}{2827\frac{21}{57}}}$, also ist auch das Folgende unrichtig.

col. 3.

```
| 123540
   5154
 ------
 494160
 61770
12354
61770
---------
636725160
---------
    57
```

hic dividendus est per 10800

```
 10800
    57
 -----
 75600
540
------
615600
```

denominator.

```
      1
     29
    261
   3854
  211777      1
 63672516|0   0
 66560000     3
  615666      4
   6155
     61
```

$1034\frac{541}{1710}$ sector *abge* (Fig. 38)

$\frac{209464}{7000}$ linea *ak*; $2\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2}$ linea *ke*

```
 209464
      5
-------
1047320
```

numerator; 14000 denominator.

$\frac{1047320}{14000}$ area trianguli *eag*

```
      1
      2
    361
| 1047320      74 pedes superficiales.
  140000
   1400
```

col. 4.

$74\frac{283}{350}$ area trianguli *eag*.

```
1034
  74
----
 960
```

$959\frac{67}{350}$ et $\frac{541}{1710}$ portio *abg*, et sunt pedes superficiales quadrati.

2167
959
1208

$1207\frac{238}{350}$ [1]) $1206\frac{21}{57}$ et $\frac{238}{350}$ et $\frac{1169}{1710}$ portio *adg*.

Nunc pro portione *alg*.

$34 \cdot \frac{209464}{7000}$

60000 ⁄

209464
60000

$\frac{12567840000}{7000}$, hic dividendus est per 34.

37
7000
259000 [2]) $\frac{12567840000}{259000}$ linea *ak*, ut *za* est 60000.

28 (20)[a], col. 1.

1 11	
2 23	
26162	4
4235264	8
12567840	5
2599999	2
25555	4
222	

48524 linea *ak*, ut *za* est 60000.

$\overline{53} \cdot 58'$ arcus *al* [3]), ut tota circumferentia circuli *algh* est 360. Habet autem se quadratum semidiametri circuli ad aream circuli, sicut sector circuli ad semicircumferentiam eius.

497 · 1554
1156 ⁄

34
34
136
102
1156 quadratum semidiametri *za*.

1554
1156
9324
7770
1554
1554
1796424

22	
1766	
36129	3
525256	6
1796424	1
497777	4
4999	
44	

1) Muss hier und im Folgenden $\frac{283}{350}$ heissen.

2) Hier hat Regiomontan statt mit 34, mit 37 multipliciert.

3) Nach der Tafel ist sin $53^0 58' = 48520$.

| $3614\frac{38}{71}$ area circuli *algh*. col. 2.

$180 \cdot \overline{53} \cdot 58'$

$3614\frac{38}{71}$ /

3614
71
3614
25298/
/38
$\frac{256632}{71}$ tertius.

10800′ primus,
3238 secundus,

256632
3238
2053056
769896
513264
769896
$\frac{830974416}{71}$ hic dividendus est per 10800

10800
71
10800
756
766800 denominator

5
273
385
64192
830974416
766800000
7668000
76688
766

1
0
8
3
pedes.

$1083\frac{11042}{15975}$ area sectoris *algz*.

14

$2\frac{1}{7}$

$16\frac{1}{7} \cdot \frac{113}{7}$ linea *zk*,

| $\frac{209464}{7000}$ linea *ak*. col. 3.

```
   209464
      113
   ------
   628392
  209464
 209464
 --------
 23669432 numerator;  49000 denominator.
```

412 7842 23669432 4900000 49000 490	4 8 pedes 3	$483\frac{2432}{49000}$ area trianguli *zag*

$$1083\frac{11042}{15975}$$

$$\underline{483}$$

$599\frac{46568}{49000}$ et $\frac{11042}{15975}$ area portionis *alg*

1805 pedes integri superficiales cum $\frac{21}{57}$ et $\frac{283}{350}$ [1]) et $\frac{1169}{1710}$ et $\frac{46568}{49000}$ et $\frac{11042}{15975}$ unius pedis, tanta igitur est area superficiei, quam occupat secundus circulus de primo. Et hoc de sexto interrogato sufficiat, nam fractiones ad unum denominatorem convertere magis laboriosum est quam subtile.

col. 4. | Redeo ad sextum. Quia rusticum videtur, pronuntiare tot et tam varias fractiones cum pedibus integris, reducam eas ad minutias phisicas, constituendo pedem unum 60 minuta etc.

$\frac{21}{57}$ ·	126 1260 577 5	22′,	18 360 57	6″;	22′ 6″ prima fractio,
28(20)[b], col. 1. | $\frac{283}{350}$ ·	21 45 16980 3500 35	48′,	13 10800 3500 35	31″;	48′31″ secunda fractio,
$\frac{1169}{1710}$ ·	1 3273 70140 17100 171	41′,	9 1800 1710	1″;	41′ 1″ tertia fractio,

1) Hier ist der obige Schreibfehler wieder berichtigt.

$\frac{46568}{49000}$ ·	6 341 279408|0 49000 490	57′,	158 6480 4900	1″; 57′ 1″ quarta fractio,
$\frac{11042}{15975}$ ·	75 35 226745 662520 159755 1597	41′,	5 164 1532 23434 452700 159755 1597	28″; | 41′28″ quinta fractio

col. 2.

3 pedes 30′ 7″

1805

1808 · 30 · 7

Igitur area superficiei occupata ex primo circulo est pedes 1808 minuta 30 secunda 7 fere.

28(20)[a], col. 4.

| **Septimum.**

Querit angulum datum dividi in tres equales.

Hec in quantitatibus continuis efficietur, in numeris autem quo pacto absolvatur, non est inventum.

Octavum.

Tres socii sunt, et quilibet per se habet denarios in marsupio. Duo primi absque tertio habent ducatos 30; duo etiam secundi absque primo habent ducatos 42; sed duo alii absque secundo habent 54: queritur, quot quilibet per se habeat.[1])

1 𝔯, 39 $\overline{\text{ıg}}$ 1 𝔯, 54 $\overline{\text{ıg}}$ 1 𝔯

84 $\overline{\text{ıg}}$ 2 𝔯 — 42

42 — 2 𝔯

21 — 1 𝔯

Primus 21, secundus 9, tertius 33.

1) In modernen Zeichen:

Hat der Erste x, so hat der Zweite $30 - x$, und wegen der dritten Bedingung der Dritte $54 - x$. Also der Zweite und Dritte zusammen

$$84 - 2x = 42$$
$$42 = 2x$$
$$21 = x.$$

Also hat der Erste 21, der Zweite 9, der Dritte 33.

Wie schon gesagt, ist damit der Briefwechsel mit Giovanni Bianchini, soweit er uns erhalten ist, zu Ende, und ebenfalls die auf ihn bezüglichen Rechnungen des Regiomontan-Manuskriptes. Dasselbe enthält jedoch noch zwei weitere Briefe Regiomontan's an Jacob von Speier und die Antwort des letztern auf das erste dieser Schreiben. Endlich findet sich aus späterer Zeit noch ein längerer Brief Regiomontan's an Christian Roder, Prof. der Mathematik zu Erfurt, angeheftet. Eine Antwort auf denselben ist nicht erhalten. Ich lasse jetzt wieder die drei Briefe der Correspondenz mit Jacobus Spirensis und die darauf bezüglichen Rechnungen der Nürnberger Handschrift folgen. Endlich wird der Brief an Roder den Schluss bilden.

VI.

Regiomontan an Jacob von Speier.

Ioannes Germanus ad Iacobum de Spira, astronomum dn̄i Federici Comitis Urbinatum.

Multa me hortantur, doctissime Vir, ac vehementer instigant ad familiaritatem inter nos conflandam et amicitie perennis felicia constituere primordia. Patriam enim in primis habemus communem, Alamanniam: lares paternos haud nimium distantes, que res unica, presertim peregrinis nobis, animos colligare sufficiet. Servimus demum principibus sibi amicissimis, inter quos quanta et quam vera alternaque exstat observantia, minime te latere arbitror. Cui quero plus favet divus ille Bessarion, dominus meus Reverendissimus, quam Umbrorum principibus Federico et Octaviano? Quos inter mortales maiora quispiam benivolentie reperiet indicia? Dominis igitur tantopere sese colentibus equum videtur, ut et servitores in unum nos consentiamus. Accedit preterea, quod potissimi facio momenti, studiorum similitudo, radix videlicet omnis amicitie. Mihi equidem doctrinas 59(51)b quadruviales | mediocriter forsitan advenisse putabit quispiam, tibi autem egregie perspectas esse facile persuadetur. Non enim satis dici potest, quanta et quam digna testimonia in tuam prestantiam confluant, presertim in astronomicis et arithmeticis, quibus adeo vigilanter incubuisti, ut dives stipendium a principe tuo suscipere merueris. Quod profecto haud mediocriter eruditionis tue habetur indicium, si quidem paucos hac nostra tempestate huiuscemodi studiis deditos veneratur vulgus: paucissimis autem ex hisce doctrinis questum fieri comperimus. Tuam denique excellentiam Babtista de Albertis[1]), vir optimus, sepenumero mihi predicavit, Petrus

---

1) Es ist das der berühmte Baumeister und Mathematiker Leone Battista

Antonini[1]) quoque, homo ille primanus domini mei ℞mi, crebrum super ea re affert testimonium, cui quantum et credam et debeam, non facile dixerim, quod ad notitiam tuam capessendam me induxerit. Petrus insuper de Castellodurante[2]), ille tuus socius, qui non cessat, urbanitatem et virtutes tuas declamare, nuperrime miros quosdam effectus tuos commemorans in tuum amorem me prorsus coniecit. Sed quod alienis monitoribus tantopere credo? Vidi equidem hisce oculis quasdam nativitatum figuras tuo calculo erectas, in quibus ardorem tuum ac summam in nostris studiis vigilantiam aperte demonstrabas. Tanta enim libido certitudinis consequende te invasit, ut ad tertia usque numerationem tuam extenderis. Eas nativitatum figuras advexit mihi dominus Ioannes Babtista, nam antehac duas, non quidem meo calculo, sed Conradini mei erectas, priusquam percussione mea examinarentur, ipse acceperat. Placuere mihi supra modum tanta solertie tue vestigia et veritatis inquisitio. Nunc igitur, ne pluribus equo obtundaris, cedo queso votis meis; fac, littere mee efficaces apud te inveniantur; Ioannem Germanum gregi amicorum tuorum adnumerare velis. Quod lingua non potest, intervallo corporum prohibente, calamus supplex impetret. Nolim expectes, | usque ad cenam voceris meam, quatenus de amicitia in conviviis, ut assolet, ineunda tecum disseratur: frigescerent enim prius epule, quam Romam ex Urbino venires. Si muneribus forsitan primicias consuetudinis nostre firmandas arbitraberis, munera non deerunt, nisi maiorum exempla parvi facias. Archimedem Dositheo problemata geometrica misisse liquet, Eratosthenem Ptolemeo regi duplationem cubi tamquam grande quoddam munus prestitisse, Eutocius Ascalonita commemorat. Talia erunt dona nostra philosophica, quidem non popularia. Ceterum si convivio gaudeas, fasianos, perdices calamo nostro non ex cella epularie depromemus. Vegetes demum vini haud longe aberunt. Ubi autem epularum sacietas nos reperit, cytharedum atque tibicinem, ut ad choros ducendos modulentur, extemplo accersemus. Quod si tandem deambulare (ut iubent medici) parumper libeat, sive Solis claritudinem contemplari, sive iacula emittere, facultas nobis dabitur. Hec est, Iacobe optime, cena nostra, in qua posthac crebrius letabimur. Ad huiuscemodi cenam vicissim me invites velim. Sed quousque in hoc convivio morabor? Dabis, spero, veniam nimium iocanti mihi, ad id enim dies presentes Dionisii te hortabuntur. Ceteri epularum luxurie hoc tempore carnisprivii corpus affligunt suum, nos vero philosophico certamine animos nostros exercebimus. Sat

60(52)[a]

Alberti. Von ihm ist bei seinen Lebzeiten nichts veröffentlicht. Erst 1843—1849 ist aus den Manuskripten manches der Vergessenheit entrissen worden.

1) Völlig unbekannt.

2) *Castellodurante* im Kirchenstaat gelegen.

iocorum iniecisse videor, ad serium deinceps hora iubet descendere. Vide igitur hec problemata varia, et quidnam circa ea sentias, quatenus tuis me litteris reddito certiorem.

1. Reperi in libro quodam vetusto interrogationem cuiusdam factam de filio suo, cuius figura habebat gradus 16 minuta 37 Tauri in ascendente, cuspis autem quinte domus, scilicet filiorum, erat in 7 g̃ et 18mi[tis] Virginis. Relique | autem domus non erat notate. Volendo autem figuram talem complere, oportuit habere latitudinem regionis, ubi facta est interrogatio. Quero igitur, quanta fuerit latitudo eius regionis, deinde que fuerint initia reliquorum domorum.

60(52)[b]

2. Roma habet longitudinem ab occidente habitato g̃ 35 m̃ 25, et latitudinem ab equatore g̃ 42, Erfordia vero longitudinem habet g̃ 27 et latitudinem g̃ 51. Quero, possitne his duabus civitatibus idem esse ascendens pro eodem instanti, et si videbitur possibile, quid sit illud ascendens. Atsi plura esse possint, que sint illa. Cum autem dixeram, possitne esse idem ascendens pro eodem instanti etc., ne contradictione implicite videar incidisse (nihil enim in instanti ascendere perhibetur), aliter et brevius quero, possitne idem punctus ecliptice pro eodem instanti esse in orizonte Romanorum et simul in orizonte Erfordensium? Et si possibile visum fuerit, quis sit ille. Quod si duo talia fuerint puncta, que sint illa.

3. Stella quedam fixa habens secundum longitudinem g̃ 13 m̃ 25 Geminorum, latitudinem autem septemtrionalem g̃ 8, in quedam regione occidit cum gradibus 23 minutis 14 Geminorum: quero latitudinem huius regionis.

(3[a].) In regione habente latitudinem 45 graduum et 24 mi[torum] natus quidam habuit in medio celi supra terram 14[m] gradum Aquarii completum, Solem autem in principio Arietis, et Martem in fine quinti decimi gradus Tauri absque latitudine: quero, quanta sit directio Solis ad Martem. Voco autem directionem arcum equatoris, qui cum arcu ecliptice inter duos significatores comprehenso pertransit circulum magnum, in quo iacet significator dirigendus. Volo dicere circulum magnum per centrum Solis duoque puncta sectionum orizontis et meridiani incedentem. Non enim latet te, quod dirigere quempiam significatorem directione saltem directa non est aliud, nisi movere spheram donec ad situm similem ei, in quo significator ipse dirigendus, constituebatar, quemadmodum trahitur ex verbis Ptolemei in tertio quadripartiti capitulo undecimo, ubi dixit: „Nec contingit etiam, ut respectu horum duorum (scilicet orizontis et meridiani) sit una eius positio, nisi cum fuerit prope loca, que sunt supra semicirculum ex circulis per locum communem circuli medii celi et circuli orizontis transeuntibus“ etc[a]. Super quibus verbis Hali com-

mentator: „Oportet", inquit, „nos petere | in toto hileg medietatem circuli in quo moratur supra terram, et quod accipiamus atazir secundum ascensiones medietatis huius circuli" etc[a]. Unde Archidiaconus in tractatu directionem docens officio sphere solide directiones significatorum numerare, semicirculum ipsi instrumento adaptare iubet in duabus intersectionibus meridiani et orizontis. Sive igitur feceris directionem per utrumlibet modorum Ptolemei, sive per modum Alchabicii, qui a secundo modo Ptolemei non est alienus, sive per tabulas directionum (omnes enim ex eodem ferme manant fonte), non habebis directiones rationi philosophice respondentes, que secundum semicirculos predictos eliciuntur. Item in eadem nativitate quesituri particulares conditiones patris iubemur, constituere locum Solis pro ascendente, si nativitas diurna fuerit, et insuper totam patris figuram elicere, quod haudquaquam absolvemus, nisi circulum, in quo iacet Sol ipse, tanquam orizontem obliquum constituerimus, circulum, inquam, per duas intersectiones meridiani et orizontis incedentem. Ita enim Hali super capitulo quinto tertii quadripartiti monet. Quero itaque ex prescripta nativitate diurna filii primogeniti initium octave domus in figura patris, cui ascendentem tribuimus locum Solis. Sed de his latius disserendum, ubi litteris meis responderis.

61 (53)[a]

4. In anno currente, quando Sol in principio Arietis secundum calculum usitatum constituetur, quero, quantus sit arcus ecliptice inter locum eius verum et circulum equatoris comprehensus, quantaque sit ipsius Solis ab equinoctiali declinatio.

Quid rides, Iacobe humanissime? An mirum tibi videtur subiectum huius interrogationis? Tranquille, velim, legas scripta Ioannis tui, qui, nisi fundamenta tabularum Alfonsi fluctuent, demonstrabit, posthac Solem distare ab ipso equatore gradibus sex fere in revolutione anni mundi hoc nostro tempore.

5. Pono Saturnum in gradibus 10 minutis 15 Arietis, Iovem in gradibus 23 minutis 38 Leonis, Martem vero in g̃ 17 m̃ 25 Virginis secundum cursus videlicet medios. Quero, an unquam coniungentur, et si ita, post quantum tempus ab instanti situum predictorum precise conveniunt, aut quando proximo fuerint coniuncti. Motum autem Saturni medium in die suppono minutorum duorum, | et secundi unius, Iovis minutorum 4 secundorum 59, Martis vero minutorum 31 secundorum 27.

61 (53)[b]

6. Divisi numerum quendam per 23, et facta divisione relinquebantur 12; item divisi eundem per 17, manseruntque in residuo 7; deinde iterum eundem divisi per 10, et relictae fuerunt 3: quero, quis fuerit numerus ille divisus.[1])

1) Das ist das Restproblem oder die Regula *Ta ien* der Chinesen. Eine ähnliche Aufgabe hat Bianchini gelöst, vergl. S. 237.

7. Invenias quatuor numeros quadratos, qui simul iuncti, quadratum conficiant numerum. Quatuor autem cubicos invenire, qui congregati cubicum numerum efficiant, non postulo; id enim difficilius multo existit.

Hec fuerunt tanquam colloquia, ut moris est, ante cenam; iam autem fasiani et perdices offerentur, sed famem fortasse tuam non explebunt.

8. Emi 240 aves denariis 16047. Erant autem aves ipse trium specierum, fasiani videlicet, perdices et columbe. Fasianus quilibet emebatur 97 denariis, perdix queque 56 denariis et columba tribus denariis: quero, quot de unoquoque genere aves fuerint.[1])

9. Quidam emit 15 ducatis aliquot brachia panni; deinde proportionaliter aliquot ducatis emit 27 brachia panni. Numerus autem ducatorum, quos exposuit, cum numero brachiorum emptorum simul efficiebant 100: quero, quot ducatos exposuerit, quotque brachia panni emerit.

Nunc ad musicam.

10. Invenias tres numeros quadratos in medietate armonica colligatos, ita videlicet, ut maximus ad minimum eam habeat proportionem, quam habet differentia maximi et medii ad differentiam medii et minimi.

11. Cordam quandam longitudinis quinque pedum divisi in tres partes, quarum prima ad secundam sonuit semitonium minus, tertia autem ad ipsam secundam sonuit duos tonos cum semitonio maiore: quero, quanta fuerit unaqueque trium cordarum partialium.

(11[a].) Est canna quedam sive fistula columnalis, cuius longitudo 12 pedum, latitudo autem, scilicet diameter orificii, habet unum palmum. Facturus sum aliam fistulam, que ad predictam sonabit consonantiam diapente vocatam, cuius fistule longitudo vigecupla sit latitudine sue: quero, quanta erit longitudo illius secunde fistule, et quanta latitudo. Pedem autem ex quatuor palmis geometricis constare supponatur.

62 (54)[a] 12. Trianguli cuiusdam area 70 pedes superficiales complectitur, | cuius tria latera sunt in proportionibus horum numerorum 5 · 8 · 12: quero quantitatem diametri circuli sibi inscriptibilis.

(12[a].) In principio eclipsis lunaris future hoc anno quero, quantum distabit punctus contactus Lune et umbre secundum visum a supremo puncto limbi lunaris. Supremum autem punctum limbi lunaris accipe eum punctum in limbo ipso, qui polo orizontis est vicinissimus.

(12[b].) Item Luna conum umbrosum ingressa dum ex diametro eius visuali quinque digiti lineales eclipsabuntur, quero, quanta erit portio

1) In Gleichungsform umgesetzt:

$$x + y + z = 240$$
$$97x + 56y + 3z = 16047.$$

lunaris corporis umbre immersa respectu totius corporis Lune, atque, ut expeditius id fiat, umbram in loco transitus Lune, tanquam sphericam subicio. Semidiametrum tamen eius eam, que ex tabulis colligitur, admittam.

13. Sole habente altitudinem 35 graduum vertex iridis supra orizontem elevabatur gradibus 7. Pes autem eius iridis a loco aspicientis distabat passibus ducentis: quero, quanta fuerit portio iridis respectu totius circonferentie.

(13[a].) Lumen Solis altitudinem habentis g̃ 37 incidit per quandam fenestram circularem ad pavimentum quoddam equedistans orizonti; erat autem fenestra in superficie ad orizontem erecta. Diameter fenestre 5 pedes complectebatur, centrum autem eius a pavimento distabat 28 pedibus: quero, quanta fuerit superficies pavimenti illuminata.

14. Divisi lineam *ab* quinque pedum (Fig. 39) in *c* puncto secundum proportionem habentem medium et duo extrema, maiori parte existente *ac*, fecique lineam ipsam carastonem[1]) (dico libram inequalium brachiorum), cuius suspensorium ex *c* puncto divisionis, ex punctis autem *a* et *b* suspendi duo corpora regularia, icocedron videlicet ex puncto *b*, duodecedron autem ex puncto *a*, ita ut eque ponderarent, volo dicere, ut linea *ab* equedistaret orizonti: quero proportionem duarum spherarum ipsis corporibus dictis circumscriptibilium.

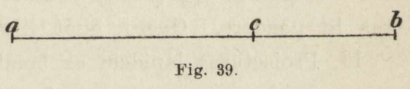


Fig. 39.

15. Est vas quoddam habens formam coni truncati, cuius fundum habet diametrum sex pedum, orificium autem habet diametrum 10 pedum, latus vero 9 pedes complectitur. Huic vasi inmitto vinum aliquantum hoc pacto, ut inclinato vase superficies vini ex una quidem parte occurrat circumferentie fundi non secando eam, ex alia autem parte, scilicet propinquissima orificio vasis, distet ab ipso orificio duobus pedibus: quero, que sit proportio huius vini respectu totius corpulentie, quam vas ipsum comprehendere solet | (Fig. 40). 62 (54)[b]

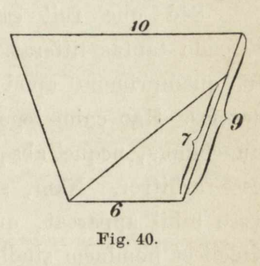


Fig. 40.

(15[a].) Resumpto hoc vase commodavi cuidam 20 talia vasa vini. Tempore autem fluente vas illud sive igne sive quapiam negligentia perditur. Ille alius volens mihi restituere mutuatum non habet simile vas, sed alium quoddam concavum concavitate spherica, equales sunt parapsides,

1) Regiomontan dürfte also den *liber carastonis* des Thabit ben Corrah gekannt haben.

cuius margo quidem habet diametrum 5 pedum, profunditas autem duos pedes complectitur: quero, quot vasa talia mihi reddenda sint. Profunditatem autem huius secundi vasis voco lineam a centro marginis perpendiculariter erectam et ad superficiem concavam vasis terminatam.

(15[b].) Vas quoddam columnale plenum vini habet longitudinem 26 palmorum, latitudinem autem 8 palmorum. Emittitur vinum aliquantum ita, ut residuum habeat profunditatem 3 palmorum et 4 quintarum unius palmi: quero, quot urne restant in vase. Urnam autem suppono vasculum quoddam columnale, cuius longitudo habeat 3 palmos et $\frac{2}{3}$ unius palmi, latitudo vero 1 palmum et $\frac{5}{6}$ unius palmi. Qui autem virgam visoriam ad portiones vasorum inveniendas effecerit, haud mediocre commodum modernis afferet mensoribus.

(15[c].) Sunt tres bombarde, quarum prima habet diametrum orificii sui 3 palmorum, secunda vero et tertia habent diametros orificiorum suorum coniunctim sumptas 8 palmorum. Tres autem lapides spherici, quos iaciunt bombarde ipse, sunt continue proportionabiles habentes simul 200 libras in pondere. Quero, quot libras unaqueque bombardarum proiiciat.

16. Proiecturus lapidem ex bombarda ad certum locum ascendi arcem, et cum quadrante magno per fenestram quandam perspexi terminum ad quem, absciditque filum quadrantis 25 gradus de limbo quadrantis. Deinde aliquantum descendi in arce et ex alia fenestra perspexi terminum eundem filo perpendiculi 18 gradus absumente. Distantia autem duarum fenestrarum, unde perspexi terminum predictum, 7 passus complectebatur. Quero, quot passibus distiterat locus perspectus ab altera duarum fenestrarum arcis memorate.

Sed quo ruit calamus? Nimium forsitan fatigaberis, vir optime, legendo tantas litteras. Finem igitur statuendo epistole hoc unum obsecro, 63(55)[a] ut quamprimum apud me sint littere tue docture, quid | de rebus illis sentias. Hac enim lege mutua inter nos fiduciam et conflabimus et in dies augebimus, neque absque multo fructu, nisi me fallit opinio, id futurum esse arbitror. Nam, si quid digni apud me fuerit, tibi commune fiat, si vero nihil appareat, quod tibi adiicere possim, id lucro tibi erit, excellere videlicet hominem studiis mathematicis omnibus apprime affectum. Postremo oratum te velim, ut magnifico et generoso Domino Octaviano servitorem suum Ioannem commendes quam devotissime, qui profecto litteras nunc accepisset meas, nisi indignum me putassem, cuius ineptiis tantus princeps obtunderetur. Magnificientie igitur sue obsequentissimum me offerat oratio tua. Vale. Ex Roma, die 15 februarii anno 1465°.

VII.

| Jacob von Speier an Regiomontan.

64 (56)[a]

Epistolam tuam accepi, vir doctissime, que ad me iocos, grata munera et tuam erga me singularem benevolentiam attulit. Laudo et doctrinam et tuam dicendi elegantiam, quam nuper mihi manifestasti. Quod autem me cupias et diligas, recte quidem facis, cum a me summopere ameris, quod ita nos facere plurime cause persuadent. Nam, ut ipse scribis, principibus, patria, studio atque moribus convenimus. Et si antea humanitate et doctrina tua amori in te meo addi non potuisset, tamen hiis tuis litteris cumulus accessit non parvus. Itaque tibi gratias ago, meque totum tibi trado. Vocasti preterea me ad cenam phasianis, avibus et vinis mirifice ornatam. Pro tanto beneficio quid tibi retribuam, nescio, qui montium cacumina et aridas arenas incolem. Careo enim istis delicatis cibis, quibus tu vesceris. Hic celum et astra non in se tantum perspecta, sed eorum effectus considero. Huc, si licuerit, ad convivium aliquando accedes, nam per te fructus boni aderunt. Hiis enim doctrinis, quas petis, hic prorsus caremus, ex quo scito, nec mea problemata proponi posse, nec tua dissolvi. Sed ut amicitie causa aliquid scribam, reliquiis quibusdam tecum agam. Sed prius, velim, scias, me illud unum admirare solere, quod me post cenam animi gratia ad Solis splendorem ducturum aiebas, ut phisici dicunt. Ipsi enim post medicinas confortantia adducunt, tu vero, pace tua dixerim, ordine perverso post maximam cenam bellum indicis, deinde infers. Nobis ergo amicissimis certare | non licet, sed tamen inter nos ante cenam, amice, colloquemur. 60 (56)[b]

Dedisti figuram interrogationis tue, que 16 graduum et 17 minutum in ascendente habebat, et in cuspide filiorum 18 minutum septimi gradus Virginis, et cuspides ceteras cum latitudine regionis petisti.

Accipe ergo pro singulis cuspidibus: In ascendente gradum 16 minu tum 37 Thauri; in loco substantie g̃ 12 m̃ 32 2̃ 31 Geminorum; in loco fratrum g̃ 7 m̃ 18 2̃ 20 Cancri; in angulo terre gradum 2 m̃ 51 2̃ 49 Leonis; in cuspide filiorum gradum 6 minutum 18 Virginis, in cuspide infirmitatum gradum 12 m̃ 7 Libre. Et hec in regione, in qua polus supra circulum emisperii flectitur gradibus 30 m̃ 14 2̃ 45 fere.

Preterea eundem punctum ecliptice duobus orizontibus pro eodem instanti inesse nego. Punctum vero ecliptice motum ab orizonte Romanorum ad orizontem Erfordie in spatio 33 minutorum et 40 secundorum hore quendam arcum describere affirmo, duobus dico punctis orizontibus infixis terminatum, que puncta ad idem instans semper diversa intelligo.

Stellam fixam, quam in 24 gradu Geminorum occidere ymaginatus es,

post principium sexti climatis fieri existimo. Hoc autem a me diligentius
65(57)[a] non exponitur propter librorum penuriam, ut dixi superius. |

Solem vero, quemadmodum contra communem observationem equinoctii ab equatore 6 gradibus distantem te demonstraturum dicis. Quando in me risum vaticinatus es, non adhuc intelligo, et ne diebus abstinentie in risum te adducam.

Solem et ipsius umbram cum puncto contactus circumferentie Lune, distantiam quoque puncti limbi Lune cenith propinquissimo nunc non determino, unum efficaces rationes tuas magnopere desidero, presertim cum fuerint experientia confirmate, quam pro iudice habebimus.

Honus de trium superiorum coniunctione, quod dedisti, accepi. Erunt itaque hec tres linee a sitibus per te ordinati propius coadunande post annos 1709 menses 2 dies 24 horas 15 $\tilde{m}$ 54 $\tilde{2}$ 36 $\tilde{3}$ 24 $\tilde{4}$ 14 et $\tilde{5}$ 6 in 26 gradu signi Geminorum, et hec colligenda ea minima, que ex casu tuo crescere valebunt. Annum tamen Persicum habeas, et mensem pro diebus 30 nota.

Quatuor etiam numeros quadratos a me queris constituentes unum quadratum. Ubi 1 · 4 · 16 · 100 coniunctim capias, et 121 ex 11 quadratum habebis. Vel melius 4 · 16 · 49 · 100 aggrega et 169 reperies.

Pannum, quo cenam nostram ornari voluisti, mensuravi, et proportione bona 64 brachia cum $\frac{2}{7}$ reperi, cuius pretium 35 ducatorum et $\frac{5}{7}$ unius recte duxi.

Velatas aviculas, quas pro cena mihi obtulisti, 114 fasiani valde
65(57)[b] pingues inveni, perdices 87, columbas 39. |

Preterea vas vini nimis effusum, quod mittis, placere non potuit, maxime nobis sepe conviventibus, et vasa adeo vacua non bene vina conservant. Extraxi autem ex vase columpnali tua urnas $19\frac{53713}{73205}$ unius.

Habes a me satis, vir optime, et dabis veniam, si post cenam paulisper acquiescam. Interim Lucianum tibi adducam, quem hinc abesse scito. Ille enim superficierum ac distantiarum mensurationibus, conicorumque corporum ponderabilium variis proportionibus caput suum tota die obtundit. Ego autem, ut tibi auscultem et morem geram, refectionem, quam voluisti, ad te mitto, non Dionysii, sed tamquam quadragesime fercula existimanda. Hanc ne despicias, rogo, sed, quid de ea senseas, me certiorem faciendum curabis.

Katholica fides nostra Iesum Christum dominum nostrum non solum deum, sed et verum hominem universis credendum instituit, qui quidem, ut verus propheta sub humanitatis habitu, per coniunctionem superiorum astrorum lege a remotis gentibus cognitus est, per coniunctionem dico magnam ipsius nativitatem proxime precedentem, ut docet Albumasar et

pericia omnium sapientum. Quero demonstrationem anni, quo nasci debebat virtute coniunctionis predicte, annum quoque, quo mundo sua doctrina primum apparere naturaliter potuit, et lex, quam dedit, quomodo causis astronomicis ipsis gentibus suasibilis sit et aliorum legibus preferenda.

Dominum Iehsum Christum natum dominica decembris 24 hora 11 | 66(58)^r minuto 20 post meridiem astronomice et katholice sane tenemus: quero constellationem specificam influentem Domino Iehsu tam acerbam mortem, nec non speciem ipsius mortis, cum et ipse elementis ceterumque causis corpore subici voluerit tamquam alter homo possibilis.

Scribitur a divo Dyonisio, qui Areopagita dictus est, in epistola, quam ad Pollicarpum, discipulum beati Pauli dederat, tempore cuiusdam eclipsis Solis miraculose facto in passione domini Iehsu Christi ipsum tunc equasse Lunam, quam per calculum suum eodem tempore in signo sibi opposito reperit; ipsam quoque Lunam hora passionis et eclipsis ab angulo plenitudinis cecidisse dicit gradibus 4 m̃ 26 2̃ 28. Quamvis Lunam Solem eclipsare vere viderint, tamen ipsam nocte sequanti loco debito restitutam recitat. Ecclesia etiam Christum passum circa oppositionem luminarium singulis annis commemorat et in anno etatis sue 34° mortuum fuisse describit. Quero, quotta dies erat mensis sacre passionis sue, et que dies septimane esse potuit, Iovisne an Veneris vel sabbati, salvo loco Lune a beato Dyonisio invento et salvis nominibus dierum quibus quottidie utimur.

Anno currente 1425 facta est superiorum coniunctio mutate triplicitatis. Quero tempus precisum coniunctionis vere atque ipsius significatum. Si hiis, quia stellis promissus est, sit natus, an si ipsum adhuc expectamus. Dic tempus, sub qua lege apparebit, et si miraculorum patratione extolletur, locum insuper nativitatis sue. Hec omnia demonstrative indicabis.

Quoniam subtilis et excellens arithmetica es, tibi aliquid amplius laboris imponere non verebor. Quero tempus vere coniunctionis trium superiorum per consuetudinem tabularum ad meridianum urbis. Volo dicere, quando proxime coniungentur.

Hec sunt, que ad te scribere volui. Que si maxima aut parva, nec te digna videbuntur, michi ignoscas rogo, et amor, quo maxime coniuncti sumus, abs te veniam postulabit. Quod me scripturum persuades, quodque idem te facturum dicas, mirum in modum placet. Ex tuis autem scriptis scio, me non parvum fructum capturum. Ex meis vero quid hauseris? Benivolentia certe undique scaturiet, alium fructum, quem pollicear, nescio. Te magnifico domino Octaviano diligentissime commendavi, nec illum a tuis litteris alienum facies. Amat enim doctos et tui consimiles. ℞mo

domino tuo tamquam devotissimum servulum me humilime comendabis.
66(58)[b] Vale, meque, ut facis, ame. Ex Urbino 6[a] Aprilis 1465.

66(58)[b] leer. 67(59)[a] leer.

Tibi deditissimus

Iacobus Spirensis. |

67(59)[b] | Spectato ac doctissimo viro
Dn̄o Ioanni Germano Astronomo
peritissimo amico precipuo.

Rome[1])

VIII.

Regiomontan an Jacob von Speier.

68(60)[a] | 1465: Respondisti nuper, vir optime, litteris meis non minus docte quam eleganter, votique mei me compotem reddidisti. Quamquam enim multitudine nimia problematum te aggressus sum, perinde ac si eruditionem meam ostentare voluerim, non tamen alio ferebar nisi ad benivolentiam tuam capessendam, quatenus amicitia inita alter alteri volupe esset assiduis conversationibus intercedentibus. Hec erat meta, cuius attingende gratia cursum institui meum, quam pro sententia nactus sum. Quod autem tot generibus problematum te incitaverim, inde evenit, ut certior fierem, quibusnam studiis potissimum exercearis. Igitur ex litteris tuis astrorum studio te oblectari perdidici, non tamen motus eorum, figuras, magnitudines, distantias et cetera huiusmodi, verum etiam, et id quidem ardentissime, influxus eorum ac effectus in elementis et elementatis contemplando, quo rectius mihi videtur, non tanta posthac rerum varietate ludere, sed protinus ad hoc unum divinum studium duntaxat animos nostros apellere. Nemo 68(60)[b] enim nisi doctissimus atque libris multivariis stipatissimus tantis | et tam diversis rebus abunde respondebit. Iam, ne prolixo defatigeris apparatu, ad exercitia nostra veniendum censeo, neque egre laturum te arbitror, si prius problemata, quibus respondisti, parumper retractavero: ita tua mihi persuadet facilitas.

Primum problema habebat gradus 16 minuta 37 in ascendente, cuspis autem quinte domus erat in 7 gradibus et 18 minutis Virginis, id est, quemadmodum tu accepisti, in cuspide quinte domus erant gradus 6 et minuta 18 completi Virginis. Dedisti loco substantie gradus 12 minuta 32 2̃ 31 Geminorum, Loco fratrum g̃ 7 m̃ 18 2̃ 50 Cancri. Altitudinem autem poli septemtrionalis g̃ 30 m̃ 14 2̃ 45 fere. Ego autem per figuram

1) Das giebt de Murr als Überschrift des Briefes.

sectoris officio tabularum sinuum ac ascensionum rectarum, ut assolet, in loco substantie reperio g̃ 12 m̃ 35 Geminorum, in loco fratrum g̃ 7 m̃ 26 Cancri, in quarta domo g̃ 2 m̃ 48 Leonis, in sexta g̃ 12 m̃ 5 Libre. Altitudinem autem poli g̃ 27 m̃ 26. In minutis itaque, ne dixerim secundis, dissonamus. Si dicas, satis esse gradus veros attigisse, cui ergo ad secunda etiam numeranda processisti? Sed de hac re non est tutum disserere, nisi una essemus, ut alter alterius modum notare posset, quare missa istec faciamus.

Duobus demum orizontibus Rome et Erfordie eundem punctum inesse negas ecliptice pro eodem instanti propter diversas longitudines earum urbium gradibus 8 minutis 25 scilicet differentis. Si rationem secteris, nisi me fallit animus, confiteberis, non modo in memoratis duobus orizontibus pro eodem instanti idem punctum ecliptice repertum iri, verum etiam in omnibus aliis duobus aut quotlibet inter duos tropicos se secantibus, aut quorum poli sunt in eodem circulo magno circulum ecliptice ad rectos angulos secante, quemadmodum in secundo libro problematum Almaiesti aperte demonstravi. Verumtamen si dicte urbes sola differrent longitudine, procederet sententia tua. Ut autem definitius me intelligas, nuncio duas urbes predictas in omni revolutione primi mobilis bis communicare in ascendente et descendente. Nam punctus terminans g̃ 7 et mi^{ta} 49 fere Geminorum | pro eodem instanti in eodem orizonte existit, similiter finis 22 graduum et 11 minutorum Tauri. Si habes tabulas ascensionum obliquarum ad has duas latitudines factas, id experieris. Accipe enim ascensionem obliquam a puncto visuali numeratam ad g̃ 7 et m̃ 49 Geminorum, hoc quidem ad Romam. Hec ascensio obliqua erit equalis ascensioni recte medii celi ad Romam inchoando ascensiones rectas apud principium Capricorni. Cum autem meridiani dictarum urbium distent a se per g̃ 8 m̃ 25, et Roma ponatur orientalior Erfordia, subtrahe ab ascensione recta prefata g̃ 8 m̃ 25, et relinquetur ascensio recta medii celi ad Erfordiam, que quidem equalis est ascensione oblique ascendentis ibidem. Cetera patent.

69 (61)[a]

Recte deinceps ad tertium respondisti interrogatum, id videlicet, fieri post principium sexti climatis, quamvis non diffinias precise librorum penuria id intercipiente. Latitudo quidem regionis quesita est g̃ 45 m̃ 35 fere, inventio autem admodum difficilis. In ea tamen re absolvenda sola sinuum tabula mihi sufficit. Verum meminisse oportuit figure sectoris, neque ipsa prorsus satisfecit, quinimo ad librum triangulorum spheralium nondum editum confugere cogebar.

Inauditum tibi videtur, Solem oportere distare ab ipso equatore sex fere gradibus, dum in principio Arietis secundum computationem Alfonsinam putatur. Non est illud vulgare negotium, neque facile demonstrabitur nisi

habenti perfectam speculationem motus octave sphere. Hanc rem et alias plurimas conscribere propediem accipiam, quibus fallacia iudiciorum nostrorum plerumque imputari potest. Videmur profecto longe a maioribus nostris degenerare, qui, ubi priscorum scripta philosophorum perdidicere, suas quoque sententias ac observationes adiicere studuerunt, et quidem, vigilantissime, quatenus ars ipsa continuis augeretur additamentis. Nos autem contra neque libros in hac arte precipuos legimus, neque si celum numerationi respondeat, aliquando exploramus, verum instar mulierum cre-
69(61)[b] dularium tabulis illis Alfonsinis et earum filiabus adheremus | tanquam divinis et numquam passuris detrimentum aliquid. Sed de his posterius.

Videbaris mihi movere risum, Iacobe optime, si circa problemata Solis ac umbre cum puncto contactus in eclipsi lunari aliquid anutiares, quasi ridicule fuerint res ille, quibus nimirum haudquaquam satisfacies, nisi prius Apollonium divinum de elementis conicis, Ptolemeum in sexto magne compositionis sue perspexeris. Neque id satis erit; primum enim Gebri Hispalensis vidisse oportebit aut tertium Menelai de sphericis, sive librum triangulorum spheralium nove traditionis.[1])

Dicis insuper, tres superiores coniunctum iri secundum medios cursus post annos Persicos 1709 menses 2 dies 24 horas 15 m̃ 54 2̆ 36 3^{a} 24 4̆ 14 5̆ 6 in 26. gradu Geminorum etc., computando tempus illud ab instanti posito. Tempus tuum valet annos ecclesie sive Romanorum 1708 dies 22 horas 15 minuta 54 cum ceteris fractionibus. Invenio igitur Saturnum in hoc tempore pervenisse ad gradus 27 mi^{ta} 50 2̆ 47 Arietis, Iovem vero ad g̃ 14 m̃ 6 2̆ 17 Virginis, Martem quoque ad gradus 27 m̃ 28 2^{a} 28 Scorpionis. Quomodo itaque coniuncti sunt in 26 gradu Geminorum?

Reddidisti preterea quatuor numeros quadratos, quales petebam. Difficulter tamen quispiam decem huiusmodi societates numerorum quadratorum inveniet, videlicet quadraginta quadratos diversos, quorum quaterni collecti quadratum efficient numerum, nisi artem id parandi calleat, quam ego petivi. Quis enim tam iners, qui longa discussione tales quatuor quadratos numeros forte non offenderet.

Sed parcum me suspicares, amice, dum 35 ducatis et $\frac{5}{7}$ unius me expendisse commemoras. Cum enim in prima emptione expendantur 15 ducati, oportebit secundum te, in secunda emptione expositos esse residuos, scilicet $20\frac{2}{7}$, quibus empta sunt 27 brachia. Unde et secundum regulam quatuor quantitatum proportionalium pro 15 ducatis habebuntur brachia $19\frac{137}{142}$,

1) Auch hier scheint Regiomontan auf das Verhältnis seiner Trigonometrie zu Geber anzuspielen.

eritque numerus ducatorum et brachiorum omnium $82\frac{249}{994}$, minor scilicet quam 100. Per artem autem rei et census, quem vocant algebram, brachia empta 15 ducatis inveniuntur 29 dempta radice quadrata | de 436, ducati autem, quibus emebantur 27 brachia fuerunt 29 et radix quadrata de 436, intelligendo radicem quadratam, ut moris est loqui in hac arte. Nam numerus ille 436 non est quadratus. 70(62)[a]

Numeros avium recte computasti. Vas autem conicum tantopere evacuatum tibi postea placebit, ubi vinum in eo contentum gustaberis. Non enim vulgare est, sed malvaticum. Laudandus demum esset pincerna, qui ex 17 urnis in veritate facere posset 19 et aliquid amplius. Equidem secundum rationem prismatum et portionum circuli non invenio nisi 17 urnas extractas et minutiam quandam exiguam.

Hec libuit circa prefatas interrogationes recensere, non, ita me deus amet, animo arrogandi, sed potius, ne more quorundam fecisse me putes, qui gravissima ceteris onera imponunt, ipsi autem neque ferre neque solvere possunt. Hinc etiam plane doceberis, quam libens in huiusmodi rebus exercear. Non possum autem Luciano tuo absenti non misereri, qui in superficierum ac distantiarum mensurationibus ceterisque rebus caput suum tota die obtundit. Dure videtur esse cervicis, cui tales res videntur difficiles, que potius anime consolationem afferunt et ad res secretissimas pandunt iter. Ubi ergo domum redierit, Ioannem Germanum cognoscat; spero enim, ne cerebrum deinde conterat suum, medelis salubribus obvenire.

Nunc tuis interrogatis, vir optime, respondere iubeor. Id autem satis docte fieri prohibet penuria librorum et ab urbe remotio. Amenitas etiam loci nunc me tenet incolam, quo segnius id fiat, occasio est, in balneis Viterbiensium, et si nunquam laver, segetes tamen virides et prata ceteraque periocunda spectacu la oculos plerumque aficiunt ac animum a speculationibus solitis dimovent.

Queris demonstrationem anni, quo nasci debuit salvator noster virtute coniunctionis magne adventum suum predicentis ac significantis, anni demum, quo doctrinam suam mundo primam apparere oportuit, et legis sue quo pacto causis astronomicis precognosci potuerit. Largius solito vocabulum demonstrationis | accipere videris, nam in arte iudiciorum nulle sunt proprie demonstrationes. Demonstrationem fortasse vocas cognitionem per experientias aut testimonia virorum sapientum habitam. Igitur non tam difficile est quam dispendiosum, ad hoc interrogatum respondere. Tempus enim huiuscemodi coniunctionis novicii etiam tabularum tractatores invenire sciunt, iudicium autem abunde consumabit, qui Albumazarem de coniunctionibus magnis vidit tractatu primo differentia secunda aut tertia, si recte memini. 70(62)[b]

Cuius etiam summas cum aliis collegit IOANNES ESCHUIDE[1]) in summa Anglicana. Item MESSAHALAH in epistola sua de coniunctionibus magnis. Sed luculentior omnibus est ANTONIUS DE MONTE ULMI[2]), qui in particula secunda sententiam ALBUMAZARIS secutus rem hanc egregie prosequitur. Que videlicet coniunctio magna triplicitatem mutans adventum prophete significet; de natura eius; de operatione; de tempore adventus et effectus eius; de signis corporis; de loco, unde egredietur; de adversaturis doctrine sue et ceteris. Has demum res retractat in particula quarta. Id eo firmius memini, quod in eo loco, quotquot vidi exemplaria, deficiunt. Si tractatus ille revolutionum apud te integer est, velim mihi communis fiat. PETRUS denique CAMERACENSIS[3]) in de legibus et sectis huic interrogato tuo satisfaciet. His contentus sis, queso, ne rem iam dudum, quoad potuit, elaboratum totiens transcribere oporteat.

Queris insuper, que causa tam acerbam mortem salvatori nostro adtribuit, quamvis gentilis et a religione christiana alienus videatur sermo ille. Hec res ex duabus radicibus pendere dinoscitur: ex coniunctione videlicet magna tantum prophetam significante, et ex nativitate eiusdem. Quoad primam, videlicet generalem radicem, supra memorata resumenda erunt, ad secundam autem radicem firmandam, scilicet nativitatem eius calculandam, dico, tabulas modernas haudquaquam sufficere. Nam si per eas locum Lune quesiverimus ad tempus dicte nativitatis, reperiemus eum differentem a loco, quem reddunt tabule PTOLEMEI in tribus gradibus et amplius. In Sole etiam diversitas apparebit, tametsi minor quam in Luna. Preterea declinatio Solis maxima tempore PTOLEMEI, atque idcirco tempore nativitatis CHRISTI a declinatione Solis maxima in tabulis modernorum scripta in 20 ferme minutis differt, que res, | in ascensionibus obliquis ac aliis huiusmodi diversitatem ingerere potest. Cur autem PTOLEMEI in hac re meminerim, hinc est, quod ipse post CHRISTUM 140 annis tabulas suas construxit, ut ex primo capitulo tertii Almagesti trahitur, neque alius propinquior nativitate CHRISTI motus astrorum consideravit. Non tamen idcirco stupendus est, quo pacto id evenire possit, ut in motibus corporum celestium tanta varietas et incertitudo occurrat. Fragilitate enim hominis per instrumenta motus astrorum observantis, non ex rei ipsius considerate

71(63)[a]

1) Es ist das der oben erwähnte JOHANNES ASHENTON oder JOHANNES ANGLICANUS.

2) Wenn RICCARDI diesen ANTONIO DA MONTE OLMI in die erste Hälfte des XVI. Jahrhunderts setzt, nach SANTINI, *Picenorum mathem. elogia* p. 55, so müssen beide irren, denn es geht hieraus unzweifelhaft hervor, dass er um das Jahr 1465 schon sein Buch *de iudiciis nativitatum* geschrieben haben muss, das 1540 bei PETREJUS in Nürnberg gedruckt wurde.

3) Das ist PETRUS DE ALLIACO, der Kardinal.

natura id accidit. Facto igitur fundamento huiusmodi, quod propter absentiam tabularum dictarum efficere nunc nequeo, nihil reliqui est, quod difficile putari possit, si prius quidem Ptolemeum in quadripartiti sui capitulo octavo, deinde vero alios de qualitate mortis nati disserentes consuluerimus.

Diem passionis salutifere dico fuisse feriam secundam. Anno enim 34° etatis salvatoris nostri equinoctium vernale fuerat vigesima secunda die Martii, oppositio autem vera luminarium eodem anno proxime secuta equinoctium fuit completis 10 diebus Aprilis horis 23 et minutis 21 fere, diebus non equatis, videlicet die undecima Aprilis currente, qui fuit feria secunda. Fuit enim *b* littera dominicalis. Hec quidem secundum tabulas modernas, nam per tabulas Ptolemei invenietur tempus illud minus adeo, quod ab ipso instanti oppositionis luminarium ad instans medietatis eclipsis Luna potuerit percurrere 4 gradus fere. Quod autem equinoctii consideratio huic serviat proposito, manifestum existit. Iudeis enim precipiebatur in exodo, ut quarta decima die mensis primi pasca celebraretur. Primus autem mensis habebatur, cuius plenilunium in ipso erat equinoctio aut statim post ipsum equinoctium.

Anno Christi 1425° fuit coniunctio duorum ponderosorum completis diebus 30 horis 20 minutis 53 Augusti ad meridianum Viennensium. Locus verus planetarum terminavit gradus 12 minuta 31 secunda 11 Scorpionis. Hec tamen coniunctio non mutavit triplicitatem, quemadmodum proposuisti, sed fuit quarta ab ea, que triplicitatem innovavit, anno scilicet Christi 1365 currente diebus 29 horis 16 minutis 15 completis. Locus autem verus planetarum tunc fuit in gradibus 7 minutis 16 secundis 47 completis Scorpionis. Coniunctio, de qua querebas, cum non erit magna, non perhibetur significare adventum prophete. Si tamen talis esset, qualem proponebas, iudicii consumatio ex prememoratis scriptoribus haberetur. | 71(63)[b]

Queris tandem tempus coniunctionis vere proxime trium superiorum secundum consuetudinem tabularum. Onus grave admodum meis imposuisti humeris, siquidem haud facile est investigare tempus medie coniunctionis eorum; plurimum enim interest, veluti nosti, inter hoc et illud. Credo, si quis Alfonsi tabulis aut aliis etiam resolutis usurus huiusmodi tempus numerare pergeret, aut fortuito quesitum numeret, aut etas sibi nequaquam sua sufficeret. Si quis tamen curiosus videri mallet quam prudens per tabulas Ioannis Blanchini, quam brevius fieri posset, id exequeretur, querendo primo aliquas coniunctiones veras duorum ponderosorum in locis eorum veris ad tempora huiusmodi coniunctionum, sive cum elongationibus veris a Sole; deinde computando cursus Martis veros sive elongationes eius a Sole ad predicta tempora. Quod si aliquando conincidentiam locorum

verorum sive elongationum a Sole inveniret, metam attigisse videretur. Si vero non, alie posteriores coniunctiones vere duorum ponderosorum querenda essent, ut prius. Sed insanire potius quam astronomice exerceri videretur, quisquis tam incerto negotio animum appelleret.

Habes tandem, vir optime, quicquid impresentiarum tuis interrogatis reddere libuit, neque veniam apud te habitum iri me ambigo, si remisse nimium ac diminute responderim penuria librorum conditioneque loci id persuadentibus. Quis enim meminisse posset omnia preceptorum ad iudicia proferenda necessaria? Vidi neminem. Atqui iactis bonis fundamentis numerorum, nemo, ideoma saltem latinum callens, iudicium complere trepidabit. Nam si talem offendet constellationem, tale scriptum efferet iudicium, si aliam, aliud. Quo verius nihil videtur in astronomia quadruviali ingenium demonstrare, quam iudiciali. Hec enim non nisi magno et excellenti ingenio viris attingenda probetur, illam vero populares et rudes quique lacerare audent. Sed ne certamen novum ineamus, de his rebus modum sermonis statuo, longe enim comodius voce quam litteris definiuntur. Si quando conveniendi dabitur facultas, de his atque aliis plurimis opere precium disseremus. Interea tamen huc apud me crebro fac sint littere, ne amor fausto ceptus auspicio refrigescat. Materiam ad me scribendi tibi non defuturum arbitror, ubi LUCIANUM | [72(64)a] tuum reducem feceris. Et si novis problematibus lacessere permittes, accipe subscripta. Quod si solutio nonnunquam perdifficilis videatur, modum dumtaxat solvendi annotabis, non enim instar puerorum ad par vel impar pro fortuna ludentium, verum modo philosophantium doctrinas regulares amplectentium invicem exercebimur.

Quidam antiqui duodecim domos celi distinguebant per circulos magnos transeuntes per duas intersectiones meridiani et orizontis et per puncta dividentia equatorem in duodecim partes equales, quorum punctorum duo quidem sunt in meridiano et duo in orizonte. Ponatur igitur principium Leonis in orientali portione orizontis: quero initia domorum reliquarum in regione habente latitudinem graduum 26. Utrum autem modus ille domos distinguendi acceptandus sit an non, posterius diserendum censeo.

Cum sit possibile gradus signi ascendentis et gradus signi in medio celi existentis equales esse numero, utrum angulorum assimiliabis vero loco planete victoris in loco coniunctionis vel oppositionis proximo precedentis nativitatem. Verbi gratia sit finis sexti gradus Piscium in meridiano et finis sexti gradus Cancri in orizonte. Vellem quoque scire latitudinem regionis, in qua casus ille soleat evenire.

Venus ponatur percurrisse vero motu suo 2 gradus et minuta 25 Arietis habens latitudinem septemtrionalem g̃ 6 et m̃ 17: quero, in quo puncto ecliptice terminetur linea recta radiationis sue trigona. Volo dicere, ducendo

lineam rectam a loco vero Veneris secundum longitudinem et latitudinem ad eclipticam, que linea sit equalis lateri trianguli equilateri circumscripti ab ecliptica: quero quis punctus ecliptice terminat hanc lineam. Similiter possem proponere de aliis radiationibus. Quantum autem, nisi me fallit opinio, modus ille radiationum conferret, se in usum sumeretur, silentio nunc preteribimus.

Sed iam calamus arcendus est, ne tumultuariis litteris magis gaudere videatur, quam aliquid frugi proferre. Dabis ergo pro mansuetudine tua veniam, et domino Octaviano suum servitorem Ioannem commendabis. Vale feliciter. Apud Balneas Viterbienses, die (sic)

Tuus totus Io. Germanus.

Auf diese drei Briefe beziehen sich folgende Rechnungen des Nürnberger Manuskriptes.

| **Circa problemata missa Iacobo Spirensi, astronomo Comitis Urbini.** 28(20)[b], col. 3.

Primum problema supposuit in ascendente g° 16 m° 37, cuspidem autem quinte domus in g° 7 m° 18 Virginis. Queruntur cuspides reliquarum domorum cum latitudine regionis, ubi talis figura incidebat.

Cuspis undecime erat in $\overline{7} \cdot 18'$ Piscium
$69 \cdot 2$ ascensio recta cuspidis undecime
$134 \cdot 8$ ascensio recta ascendentis.
$65 \cdot 6$ differentia dictarum ascensionum et illud est quadruplum hore inequalis diurne puncti orientalis ecliptice.

$\overline{32} \cdot 33'$
$97 \cdot 39$ arcus semidiurnus ascensionis
$134 \cdot 8$
$36 \cdot 29$ ascensio recta medii celi,
$\overline{4} \cdot 9'$ Aquarii medium celum.
$69 \cdot 2$
$32 \cdot 33$
$101 \cdot 35$ ascensio recta cuspidis duodecime
$\overline{12} \cdot 36'$ Arietis cuspis duodecime domus.

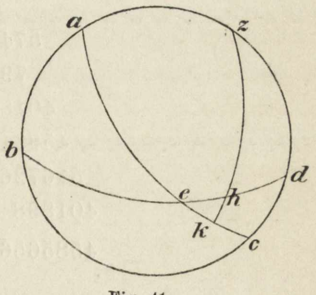


Fig. 41.

$\overline{7} \cdot 39'$ arcus *ek* (Fig. 41)
$16 \cdot 53$ arcus *hk*, supponendo Solis declinationem maximam $23 \cdot 33 \cdot 30$.

Coniuncta

$ec \cdot ck$
$ed \cdot dk$
$hz \cdot zk$

col. 4. | $\overline{7} \cdot 39'$

82 · 21 arcus kc; 59466 sinus kc;
16 · 53
73 · 7 arcus hz; 57414 sinus hz.

60000 · 59466
57414 /

```
   59466
   57414
  237864
  59466
 237864
416262
297330
     5
341418|0924
 56903|
```

56903 sinus hd; $\overline{71} \cdot 31'$ arcus hd[1])
18 · 29 arcus eh; 19022 sinus eh
7987 sinus ek

19022 · 7987
57414 /

29 (21)[a], col. 1.

```
    57414              6
     7987             32
   401898           314826          2
  459312          72127474          4
 516726         | 458565618         1 2)
401898           190222222          0
458565618        1902222            7
                  19000
                   199
                    1
```

1) In der Tafel ist sin 71° 31′ = 56905.

2) Hier hatte sich Regiomontan zuerst verrechnet. Er erhielt 24106 als Quotient und 11286 als Rest.

24107 sinus zd; $\overline{23} \cdot 41'$ arcus zd[1]), et est elevatio poli septemtrionalis in regione, ubi supra memorata figura erecta fuit. Iacobus autem reddidit $\overline{30} \cdot 14' \cdot 45''$.

| Ad prosequendum problema primum missum Iacobo suppono altitudinem poli $\overline{23} \cdot 41'$, et quero arcum semidiurnum ad $\overline{16} \cdot 37'$ Tauri. 29(21)[b], col. 2.

$\overline{16} \cdot 42' \cdot 25''$
15 · 59 · 45
17 · 20
37 ·
8 · 40
1 · 59
2 pars proportionalis a.
10 · 41

16 · 53 · 6 declinatio puncti ecliptice supra memorati

23 · 41 arcus zd;	24101 sinus arcus zd[2]);	secundus.
66 · 19 complementum zd;	54947 sinus dc;	primus.
83 · 6 · 54 arcus zh;	57414 sinus zh;	quartus.
	17426 sinus hk;	tertius.
	60000 sinus totus;	quintus.

24101
17426
144606
48202
96404
168707
24101
419984026

2
13
284
396
4281
9892 | 7
323969 | 6
4541122 | 4
61655845 | 3
419984026
54947777
549444
5499
54

1) In der Tafel ist sin 23°41′ = 24101.

2) An dieser spätern Stelle hat also Regiomontan den Sinus aus seiner Tafel entnommen, und nicht den früher errechneten benutzt.

col. 3.

| 7643
60000
458580000

1	
64	
17	
1 463	
54174	7
132928	9
1668361	8
159712482	7
458580000	
57414444	
574111	
5744	
57	

7987 sinus *ek*; $\overline{7}\cdot 39'$ arcus *ek*

97 · 39	arcus semidiurnus quesitus.
32 · 33	duplum hore diurne ascendentis, scilicet $\overline{16}\cdot 37'$ Tauri.
134 · 8	ascensio reta ascendentis.
27 · 27	duplum hore nocturne
161 · 35	ascensio recta secunde domus
189 · 2	„ „ tertie domus
216 · 29	„ „ quarte domus
32 · 33	
249 · 2	„ „ quinte domus
281 · 35	„ „ sexte domus.

2ª: $\overline{13}\cdot 2'$ ♊; 3ª: $\overline{8}\cdot 18'$ ♋; 4ª: $\overline{4}\cdot 9'$ ♃; 5ª: $\overline{7}\cdot 18'$ ♍.

Sed Iacobus intellexit g̃ 16 m̃ 37 completa in ascendente, in cuspide autem domus filiorum accepit 6 gradus completos et 18 minuta. Fortasse hoc fecit diversitatem. Videbo igitur.

col. 4.

$\overline{68}\cdot 5'$	ascensio recta cuspidis undecime,
134 · 8	ascensio recta ascendentis.
66 · 3	differentia duarum ascensionum, et est quadruplum hore diurne ascendentis.
33 · 1	duplum hore diurne ascendentis,
26 · 59	duplum hore nocturne.
134 · 8	
161 · 7	ascensio recta secunde domus,
188 · 6	„ „ tertie domus,
215 · 5	„ „ quarte domus,
33 · 1	
248 · 6	„ „ quinte domus,
281 · 6	„ „ sexte domus.

2ª: $\overline{7}\cdot 21'$ ♊; 3ª: $\overline{7}\cdot 26'$ ♋; 4ª: $\overline{2}\cdot 48'$ ♃; 5ª: $\overline{6}\cdot 18'$ ♍; 6ª: $\overline{12}\cdot 5'$ ♎

Cuspides itaque domorum satis appropinquant veritati.

$\overline{66}\cdot 3'$
33 · 1
99 · 4 arcus diurnus ascendentis.
9 · 4 arcus *ek*
80 · 56 arcus *kc*

60000 primus,
59250 secundus,
57414 tertius,

57414
59250
2870700
114828
516726
287070

4531
340177 | 9500
56696

| 56696 sinus *hd*; $\overline{70}\cdot 54'$ arcus *hd* [1]);

30 (22)ª, col. 1.

19 · 6 arcus *eh*; 19633 sinus *eh*; primus
17426 secundus
60000 tertius

17426
60000
1045560000

5
1 34
31875
55926
362147 | 5
6312598 | 3
594911455 | 2
1045560000 | 5
196333333 | 5
1963333
19666
199
1

53255 sinus *dc*; $\overline{62}\cdot 34'$ arcus *dc* [2]);

27 · 26 arcus *zd*, et est altitudo poli quesita.

Iacobus autem reddidit $\overline{30}\cdot 14'\cdot 45''$.

1) sin 70°54′ ist = 56697 in Regiomontan's Tafeln.

2) Hier ist in der Tafel sin 62°34′ = 53253

29 (21)[a], noch col. 1.

| Problema quintum decimum supposuit vas columnale longitudinis 26 palmorum et latitudinis 8 palmorum. Emittatur unum denar., residuum habeat profunditatem 3 palmorum et $\frac{4}{5}$ unius, Urna supponitur habere longitudinem $3\frac{2}{3}$ palmorum, latitudinem vero $1\frac{5}{6}$ palmorum, queritur, quantum vini restat in vase.

8
8
16
26
96
32
416 prima totius vasis

col. 2.

$\frac{11}{6}$. 11 11 11 11 121 36 $\frac{121}{36}$ $\frac{11}{3}$ | 121 11 121 121 1331

$\frac{1331}{108}$ prisma urne unius.

$\frac{416}{1} \cdot \frac{1331}{108}$

416	1	
108	4	
3328	15995	33
	44928	
416	13311	
44928	133	

$33\frac{1005}{1331}$ urne, capacitas totius vasis.

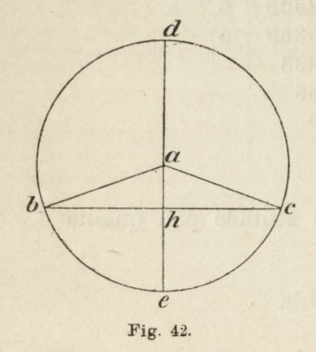


Fig. 42.

Sit *de* latitudo vasis columnalis, et *eh* profunditas vini residui (Fig. 42).

4 · 60000
$\frac{1}{5}$ /

12000 | 3000
4

3000 linea *ah*, ut *ae* est 60000.

$\overline{2}$ · 52′ complementum arcus *be* [1])

87 · 8 arcus *be*; 59925 linea *bh*, ut *ae* est 60000,

| 120000 linea *de* col. 3.

14400000000 quadratum circumscriptibile circulo *bec*

14400000000
14400000000
158400000000

1 1
1 2243 2
14264283264
158400000000
144444444444
1111111111

| 1 |
| 1 |
| 3 |
| 1 |
| 4 |
| 2 |
| 8 |
| 5 |
| 7 |
| 1 |
| 4 |

11314285714 area circuli prescripti.

Sed in mentem venit modus facilior per tabulam portionum circulorum. [2])

5405913441
5280419620
125493821 tertius
60 · 8.

125493821
8

44113 2 |
100395056 | 8
16732509 |

5405913441
16732509
5422645950 portio *bec*

5657130000 area semicirculi
5422645950
234484050
17
1641388350
234484050
3986228850 dividendus.

1) sin 2°52′ ist in der Tafel = 3001.

2) Regiomontan muss also eine Tafel der Kreisabschnitte besessen haben.

$$\frac{3986228850}{5657130000},$$

igitur ex vase extracte sunt 17 urne et minutia parva quedam. Iacobus reddidit 19 urnas et $\frac{5}{7}$ fere unius.

col. 4. | Circa problema aliud de coniunctione media trium superiorum etc[a].

```
   1709
    365
   ----
   8545
  10254
  5127
 ------
 623785
     60
     24
 ------
 623869 dies, quos dedit Iacobus
```

```
   365
     4
  ----
  1460 · 1461
```

```
   134     |
  13122    |
  269442   | 4            427
  623869   | 2              4
  146111   | 7           ----
   1466    |             1708 anni equales.
    14     |
```

1708 anni. 0 menses. 22 dies. 15 hore. 54 m̃. 36 2̃. 24 3̃. 14 4̃. 6 5̃.

```
11 · 24 · 40′ · 56″
 9 · 14 · 16 · 39
 3 ·  7 · 52 · 39
          44 · 13
           1 · 15
                5
 0 · 10 · 15
-------------------
 0 · 27 · 50 · 47 medius motus Saturni ad hoc tempus Iacobi
```

4 · $\overline{2}$ · 10′ · 14″
0 · 13 · 31 · 10
8 · 2 · 53 · 51
1 · 49 · 44
3 · 7
4 · 23 · 38 · 11

5 · 14 · 6 · 17 medius motus Iovis

| 8 · $\overline{15}$ · 48′ · 12″ — 29 (21)[b], col. 1.
2 · 11 · 3 · 4
3 · 1 · 19 · 35
11 · 31 · 46
19 · 39
1 · 11
5 · 17 · 25 · 1

7 · 27 · 28 · 28 medius motus Martis ad tempus Iacobi

Igitur in hoc tempore dato non coniunguntur, sed plurimum a se distabunt.

Circa nonum problema de panno et ducatis.

Quidam emit 15 ducatis aliquot brachia panni; deinde proportionaliter aliquot ducatis emit 27 brachia panni. Numerus autem ducatorum, quos exposuit, cum numero brachiorum emptorum simul efficiebant 100: quero, quot ducatos exposuerit, quotque brachia panni emerit.[1])

---

1) Der Gang der Rechnung ist in moderner Bezeichnung folgender:
Die für 15 Dukaten gekauften Ellen seien x, dann bleibt für die Zahl der Dukaten, welche 27 Ellen kosten, $100 - (15 + 27 + x)$ übrig, das ist

$$58 - x.$$

Nun muss sich verhalten $15 : x = (58 - x) : 27$, und es ergiebt sich die Gleichung

$$58x - x^2 = 405$$
$$58x = x^2 + 405.$$

Es ist $29^2 - 405 = 436$, also

$$x = 29 - \sqrt{436} \sim 8{,}1\,.$$

Es ist also, wie Regiomontan andeutet, die wirkliche Ellenzahl 35,1 ungefähr das, was Jacobus Spirensis als Anzahl der Dukaten angiebt. Hätte Regiomontan den zweiten Werth von x benutzt, den er also wohl nicht kannte, nämlich $x = 49{,}9$, so hätte er 76,9 Ellen und 23,1 Dukaten erhalten.

ducati 1 ꝛ
15 ╳
0 27 brachia

27 | 100
15	42
42	58

58 $\overline{\text{ig}}$ 1 ꝛ   58 $\overline{\text{ig}}$ 1 ꝛ

27
15
―
135
27
―
405

58 ꝛ $\overline{\text{ig}}$ 1 ȼ — 405
58 ꝛ — 1 ȼ et 405
29.

29
29
―
216
58
―
841
405
―
436 ℞ de hoc.

29 $\overline{\text{ig}}$ ℞ quadrata de 436 est valor rei

436 | 20
4 |

Valor ergo rei minor est quam 9 et maior quam 8. Iacobus reddidit $64\frac{2}{7}$ brachia panni et ducatos $35\frac{5}{7}$. Si ex numero brachiorum fecisset ducatos, propius ad verum venisset.

30 (22)[b], col. 2.

| Iterum circa problema de ducatis et pannis.

Iacobus reddidit 64 brachia et $\frac{2}{7}$ panni, ducatos autem $35\frac{5}{7}$

col. 3.

15   0 | $35\frac{2}{7}$
0   27   15
$20\frac{2}{7} \cdot 27.$

Igitur $20\frac{2}{7}$ ducatis empta sunt $27 \cdot$ brachia.

$20\frac{2}{7} \cdot 27.$
15 ╱

27
15
―
135
27
―
405 dividendus

142
―
7

13	
55	
1417	19 brachia
2835	
1422	
14	

Igitur 15 ducatis empta sunt $19\frac{137}{142}$ brachia

19		959
27	$\frac{137}{142} \cdot \frac{2}{7}$	284
20		1243
15		994
81		249

$82\frac{249}{994}$ brachia et ducati.

| Circa problema meum tertium.

30 (22)[a], col. 1.

Stella fixa supponitur habere $\overline{13} \cdot 25'$ Geminorum cum latitudine septemtrionali octo graduum, que stella in regione quadam occidit cum $\overline{23} \cdot 14'$ Geminorum: queritur latitudo regionis.

| Sit meridianus *abcd*, sub quo medietas orizontis occidentalis *bcd*, et medietas ecliptice *aec*, ita quod punctus *e* sit in orizonte, scilicet finis graduum 23 et minutorum 14 de Geminis. Stella fixa sit in *h*; polus mundi borealis sit *z*, productoque arcu *zhk* usque ad eclipticam stella predicta solebit mediare celum in puncto *k*. Si itaque arcus *hk* notus esset cum arcu *ke* et angulo *ekh*, reliqua omnia paterent etc. (Fig. 43). Primo igitur inveniam punctum ecliptice, cum quo ipsa stella mediat celum.

col. 2.

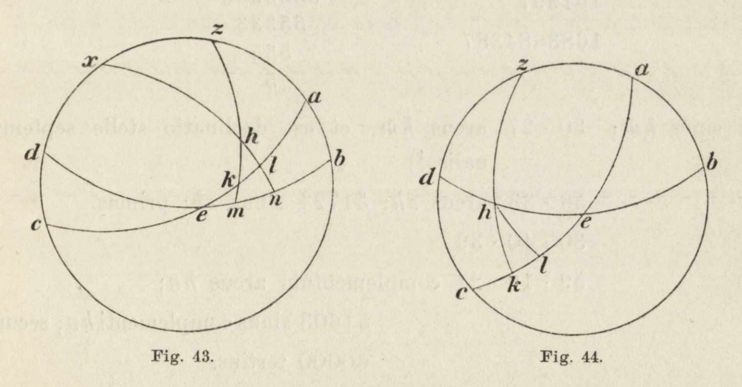


Fig. 43. Fig. 44.

Sit in secunda figura *abcd* (Fig. 44) colurus distinguens solstitia; *bed* medietas equatoris, et *aec* medietas ecliptice; *e* principium Arietis et *a*

principium Cancri; *z* polus mundi borealis, et *x* polus ecliptice borealis, stella memorata in puncto *h* etc.

```
73 · 25′ arcus ed
74 · 43  arcus en
22 · 35 · 38
22 · 42 · 36
-----------
      6 · 58
     43
     ------
      5 ·  1
22 · 40 · 39 arcus ln
 8
-----------
30 · 40 · 39 arcus hn;                     30613 sinus hn;           tertius,
59 · 19 · 21 complementum arcus hn;        55361 sinus arcus xn;     primus,
23 · 33 · 30
-----------
66 · 26 · 30 arcus xd;                     54999 sinus xd;           secundus.
```

col. 3.

```
                 55361 · 54999
                 30613 /
                              4
        54999                 5 6
        30613                1157
       ------               2273635     | 3
       164997             134859975     | 6
       54999             1683684387     | 4
      329994              553611111     | 1
     164997                 5536666     | 2
     ----------              55333      |
     1683684387               555       |
                               5        |
```

30412 sinus *hm*; $\overline{30}$ · 27′ arcus *hm*, et est declinatio stelle septemtrionalis.[1])

```
59 · 33      arcus zh; 51724 sinus zh; primus.
30 · 40 · 39
------------
59 · 19 · 21 complementum arcus hn;
                     51603 sinus complementi hn; secundus
                     60000 tertius.
```

1) Dieser Sinus ist in der Tafel = 30407.

51724 · 51603
60000 /

	5 3	
	139	
	648	
	434991	
	545343	5
51603	1968868	9
60000	541964824	8
3096180000	3096180000	5
	517244444	9
	5172222	
	51777	
	511	
	5	

| 59860 sinus complementi *mn*; $\overline{86}$ · 5′ complementum *mn* col. 4.

3 · 55 arcus *mn*
74 · 43
70 · 48 arcus *em*.

$\overline{12}$ · 18′ Geminorum, cum quo mediat celum stella predicta.

$\overline{12}$ · 18′
13 · 25
1 · 7 arcus *kl* in prima figura
22 · 20 · 29
22 · 28 · 17
7 · 48
18 ·
2 · 6
14
2 · 20
22 · 22 · 49 arcus *km* in secunda figura
30 · 27
8 · 4 arcus *hk* in secunda figura sive etiam in prima.

8422 sinus *hk*, primus
8050 sinus *hl*, secundus
60000 tertius

8422 · 8050
60000 ⁄

8050
60000
483000000

1	
8	
24967	
35129	
592352	5
114964	7
62966422	3
483000000	4
84222222	9
842222	
8444	
84	
8	

57350 sinus anguli hkl in prima figura.[1])

30 (22)[b], col. 1. | $\overline{72}$ · 54′ angulus hkl in prima figura.
23 · 14
12 · 18
10 · 56 arcus ke in prima figura,
1 · 7
9 · 49 arcus le in prima figura,
80 · 11 complementum arcus le; 59121 sinus complementi le, secundus.
82 · 0 complementum hl in prima figura; 59416 sinus complementi hl, tertius.
60000 primus.

60000 · 59121
59416 ⁄

59416
59121
59416
118832
59416
534744
297080

3 3	
351273	3336
58545	

58546 sinus complementi arcus he in prima figura.[2])

1) Dieser Sinus ist in der Tafel = 57348.
2) Hier ist in der Tafel der Sinus = 58547.

$\overline{77}$ · 22′ complementum arcus *he*

12 · 38 arcus *he* in prima figura.

Pro angulo *ehk*.

13123 sinus arcus *he* in prima figura, primus

57350 sinus anguli *hkl* in prima figura, secundus

11380 sinus arcus *ke* in prima figura, tertius.

```
                      13123 · 57350
                      11380/

                               1          |
                              13          |
                              42          |
   57350                     539          |
   11380                  126469          |  4
 ---------               3981926          |  9
 4588000                12774237          |  7
 17205                 238826914          |  3
 5735                | 652643000          |  2        col. 2.
5735                   131233333          |
---------               1312222           |
652643000                 13111           |
                            133           |
                              1           |
```

49733 sinus anguli *ehk* in prima figura.[1])

Iam pro arcu *zd*.

$\overline{30}$ · 27′

59 · 33 complementum dicte declinationis, et est arcus *hz*;

51724 sinus huius complementi.

```
          60000 · 49733
          51724/
                51724
                49733
               ------
               155172
              155172
             362068
            465516
           206896
          ------------
           1541  |
         257238  | 9692
          42873  |
```

42873 sinus arcus *zd* in prima figura.

$\overline{45}$ · 36′ arcus *zd*[2]), et est altitudo poli borealis quesita.

1) Nach seiner Tafel wäre der Winkel *ehk* = 58° 59′.

2) In Regiomontan's Tafel ist sin 45° 36′ = 42868.

Damit ist aus der Zeit des italienischen Aufenthaltes Regiomontan's der erhaltene Briefwechsel beendigt. Der Sammlung, welche jedenfalls von Regiomontan selbst bewirkt ist, ist dann aber aus dem Jahre 1471 von Nürnberg aus geschrieben noch ein Brief an den Professor in Erfurt Christian Roder eingeheftet, welchen wir zum Schlusse noch zum Abdrucke bringen.

IX.

Regiomontan an Christian Roder.

xps

76 (68)[a] | Ioannes de Regiomonte mgro Christiano, mathematicarum prestantissimo S. D. P.

Si miraris, vir egregie, inopinas hasce litteras ab homineque ignoto datas, que ad scribendum me impulerit causam paucis accipe. Nuper apud Dominum meum regem et proceres Hungarie mihi moranti, afferebatur predictionis quiddam ad annum superiorem ex Italia allate, in quibus tam crebram quam manifestam cernere erat discrepantiam, ut quasi ex composito autoris sibi invicem contradixisse viderentur, ab eventu autem rerum omnes pariter aberrantes. Illi vero principes subattoniti, quamvis antea miro quodam astronomici studii tenerentur amore, cum tamen universalem pene animadverterent fallaciam, dubitabundi rogare ceperunt pro suo quisque ingenio, undenam tantus tamque communis error profluat; culpandane sit ars ipsa, an potius professorum incuria, quid quod prisci astrologi, si creditur historicis, ad unguem semper futura pronunciasse perhibentur. Tales pene innumeras mihi questiunculas obiecerunt viri illi augusti ac astronomiam probe callentes. Ego autem ex improviso respondere coactus, postquam mores atque doctrinam astrologorum in Italia iam pridem mihi notorum exposui, huiuscemodi erroris causam codicibus inpixi vel minus bene traductis, vel indocte expositis, vel alio id genus vicio labefactis. Motus denique stellarum nostra tempestate observationibus non satis esse compertos, quod et exemplis plurimis confirmavi non modo propriis, verum etiam alienis, et iis quidem virorum nobilium. Hanc denique fallaciam non solum in quinque retrogradis, sed etiam in luminaribus ipsis animadverti defectu eorum aliter per calculum et aliter per inspectionem apparente, et ne fides recentioribus testimoniis negaretur, Albategnium introduxi, qui utriusque lunaris defectus aliter in celo deprehendit, quam per numeros Ptolemaicos eliciebantur, quod et Ptolemeo ipsi obtingit inspectiones suas ad numeros Hipparchicos conferenti. Hinc sequi oportere, quod neque revolutiones sive mundane sive genitales per tabulas nostras deprehendi

possint, nec stelle in domiciliis celi opportune sisti. Hoc presertim attento, quod nec domus ipse, quod apte ab universis distinguitur astronomis, quibus certe preteritis aut minus caute apertis iudicium omne astrologicum incertum fore. Hec atque alia multa succincte et per transitum quendam coram ipsis recensui, ut autem hanc nobilissimam ab iniuriis inperitorum vindicarem. Finis autem totius colloquii nostri eo tendebat, ut, nisi motus stellarum denuo investigarentur, vel saltem emendatius agnoscerentur, quemadmodum prisci fecere philosophi, Ptolemeusque ipse omnium princeps sepenumero id fieri subhortatur, non posse durare hanc artem, sed in dies laceratum iri, ac tandem preceps evanescere. Cumque insinuarem me iam dudum | resarciendi astronomie fundamenta quedam iactasse, sed hanc proviciam unico homini nimis duram et pene impossibilem esse, oportere quidem complurium observatorum adminiculo et frequenti siderum inspectione, hanc labem, quoad eius fieri potest, expurgari, illi contra iam non causam morbi, sed medelam queritantes sciscitabantur, ubinam talium studiosi rerum offendi possent. Respondi ego, plurimos quidem passim astronomie sciolos apparere, qui vero artem hanc ceterasque mathematicas eximie calleat, presertim in Germania, preter unum magistrum Christianum Erfordiensem extare neminem. Hoc pacto respondere me iussit officium. Multa equidem de tua excellentia cum ex aliis plerisque omnibus Erfordia venientibus, tum ex fratre Aquino[1]) volupe intellexi, neque defuit testimonium Ioannis Keller, conterranei mei, qui non modo doctrinam tuam, sed et mores et vite integritatem apprime laudare solitus est. Quare tuas virtutes coram proceribus recensenti mihi mox imperatum est, ut ope tua ad ceptum iam pridem negotium fruerer. Itaque, vir doctissime, sive famam tuam preclaram ampliare velis, sive exercitio mathematicarum primarum oblectari libeat, sive etiam discipulis tuis haud mediocre commodum exhibere, pande, queso, fores benivolentie tue atque humanitatis: novum et, nisi me fallit opinio, haud ingratum olim futurum amicum recipe Ioannem, qui multorum principum domestica familiaritate posthabita patrono contentus unico ad urbem Norembergam concessit, quo vicinior tibi factus tecum commodius ac tempestivius philosophari queat. Sinamus ceteros bellorum domare rabiem, nos autem more nostro militemus non quidem equestri, ut assolet, certamine, verum potius librorum assidua evolutione; arma nostra sunto non cestus, non pila, neque arietes aut balliste, sed radii Hipparchii atque Ptolemeici, quos iam ex ere calaminato spectabiles ingentes atque ad celi contemplationem accomodatissimos extruxi; armillis denique et aliis id

76 (68)[b]

1) Dieser Mann, auch Aquinas Dacus genannt, reiste um die Mitte des 15. Jahrhunderts in Deutschland und lehrte gegen Bezahlung die Algebra.

genus astronomicis machinis res agetur. Huic bello acerrimo te affore velim sive ducem optimum sive comilitonem. Expugnandi enim sunt errores veritatis, hostes, quibus non modc sideralis disciplina, verum etiam omnes prorsus mathematice squalent, ut illustratis olim tamen tam preclaris artibus libri novi atque emendatissimi et quod fieri potest incorruptibiles exoriebantur. Cuius quidem negotii arduissimi onus iam humeris incumbit meis. Conor equidem opere pretium omnia mathematicarum volumina a 77 (69)[a] pressili | conscribere littera, ne mendosa deinceps exemplaria lectores quamvis acutissimos obtundant. Non enim ignoras, quod tenui vicio, et ut ita loquar, unius plerumque elementi transpositione longa et alias clara demonstratio interturbari soleat. Nulli profecto codices hoc scribendi munere magis egent quam mathematici, quippe qui ob penuriam nominum elementis singulariis ad res quasque significandas utuntur, atque idcirco corruptioni magne obnoxii redduntur. Quid de abacis dicam astronomicis? Ubi si character unicus vel pretereatur, vel transponatur, vel quomodolibet vicietur, totam labefacturi paginam necesse est. Longum est enarrare, qui per singulas mathematicas loci sint exscribrandi et nonnumquam radicitus evellendi. Adeo enim omnes oblitterate sunt et per secula multa falsis exposiunculis atque fallacibus interpretamentis obrute, ut ne vocabulum suum quidem satis tueri possint. Nempe a discendo, si originem respicimus Grecam, nuncupate quomodo ullam prebebunt disciplinam, si tot tantisque mendis opplete suspicionem pariant, nihil prorsus sibi veritatis inesse? Nolim nimis diem terere in astrologia predictionaria, quamvis ea ad te scribendarum occasionem dederit litterarum, que quam fluxa sit ac fragilis, quamque autores sui invicem discrepent, et, quod turpissimum est, multi sibi ipsis minime constant, propediem in publicum dabitur. Sed de quadruviali minus suspecta pudet profecto fateri, quam lacera sit et caduca. Nam, ut insigniores eius notas omittam, brevitatis gratia, hoc unum magis dolendum quam accipiendum censeo, quod hodie astronomi vulgo egregii vocitantur, qui calculos motuum celestium utcunque promere didicerunt, in tugurio non in celo astronomiam soliti, et siquidem absque errore id facerent, aliquanto tolerabilior esset eorum fastus. Sed illi creduli nimis Alfonsinium abacum quasi celo lapsum venerantur, cum tamen nusquam appareant rationes sue, cur pleraque immutaverit, quodque celo stellati duplicem motum per tabulas suas expresserit, quod solarem excentricitatem atque alia plura inverterent. Facile respondebit computator, quod observationibus astronomius innixus sit, ostendetur vel nullis vel perquam paucis inspectionibus usum esse, quinimo ex serie numerorum suorum atque exercitio plurima deducuntur inconvenientia, que non solum Ptolemeo et Albategnio ac aliis vetustioribus, sed et hodiernis repugnant experimentis, et

quidem manifeste adeo, ut vix absque pudore coram doctis recensere possint. Sepe equidem patrocinium huius viri contra nonnullos adversarios sumpsi, qui Persicas tabulas aut Toletanas | sive alias iamdiu explosas illustrare 77 (69)[b] et pro certioribus redintegrare conabantur. Ubi vero neque has neque illas satis roboratas esse animadverti, veritati potius studendum censui quam infirmis quibuslibet inventoribus allucinandum. Ceterum ille Alfonsine multas pepererunt filias matris utrique contagio laborantes, quas nescio, si compellare liceat sine malivolentia quorundam adeo tabulatoris primi auctoritas plerisque omnibus irrepsit. Hec, eximie vir, non per invidiam ita me deus amet, commemoro; non enim me fugit erratis quidem monitu Aristotelico veniam dari oportere, bene autem inventis multam habendam esse gratiam.[1]) Verum commiseratione quadam inductus paucula meditationum mearum initia aperire libuit, ut ope tua rectior olim numerandi formula astronomie studiosis tradatur. Quocirca, si quasdam stellarum inspectiones motuumque celestium observationes aut utriusque luminaris defectus aliquando litteris mandasti, fac, queso, mihi communes fiant. Illis enim ad meas collatis aliquid spero, quod emendandis supputationibus astronomicis conducat, elicietur. Quod si meas quoque vicissim cupis evestigio tibi impertiar, quas in studio Viennensi una cum preceptore meo conscripsi, quas Rome in domo domini Niceni Cardinalis, quasque Patavii ac demum in regno Hungarie et nuperrime in urbe Nurenberga feci et deinceps facturus sum. Eam enim mihi delegi domum perpetuum, tum propter commoditatem instrumentorum et maxime astronomicorum, quibus tote sideralis innitur disciplina, tum propter universalem conversationem facilius habendam cum studiosis viris ubicumque vitam degentibus, quod locus ille perinde quasi centrum Europe propter excursum mercatorum habeatur. Quod autem ex te nunc desidero, ab aliis quoque celi spectatoribus ac generalibus studiis omnibus, quantum fieri potest, exposcam, ut congestis variis ac certis observationibus numeri tabulares meliusculi reddantur. Quo facto, si deus aspirabit, planetarum ephemerides, vocant almanach, ad triginta vel plures annos charactere pressili pro amicis universis componam. Nam, etsi universe arti instaurande etatem nostram dubitemus suffecturam, conandum tamen est pro viribus, ut aliquid saltem veritati propinquius investigetur, ne vitam inerti silentio transegisse criminentur.

Habes iam, ut arbitror, cuius rei gratia ad te | litteras dederim, quamvis et alie compluscule scribendi occasiones non defuerint. Quid enim de 78 (70)[a] astronomia ceterisque mediis scientiis mirum est, si nonnunquam claudicant,

---

1) Auf dieselbe Stelle des Aristoteles bezieht sich Coppernicus in seinem Briefe an Wapowski gegen Werner.

cum binis singule pedibus altero quidem recto altero autem contorto gradiantur? Extremarum enim scientiarum altera plerumque incerti aliquid afferre solet. Nam ipse enim primarie mathematice purgamento haud mediocri egere videtur. Ita vorax etas omnia penitus attenuat, ut indubitabilis veritas, et cui primum certitudinis gradum peripateticorum antistes tribuit, ab opinionibus falsisque interpretamentis contaminentur. Et ut ex ipso quasi vestibulo geometrie quedam promantur libamenta, quid dices de principio, quod de recta quavis linea duabus incidente assumitur? Nonne illud longe obscurius et ab intellectu remotius est quam vigesima nona primi elementorum Euclidis conclusio, cuius gratia principium illud premittitur? Quem scrupulum et Campanus animadvertens hoc principium inter petitiones stolide collocavit, quamvis Graeci inter communes scientias ordinarint.[1]). Sed Arabes nonnulli a ministerio demonstrationis penitus reiecerunt hoc proloquium, aliter quidem equidistantes lineas diffiniendo. Pudet profecto recensere labores Campani, quibus frustra stabilire tentat principia quinti elementorum voluminis, quippe qui diuturno studio ac magno verborum involucro irretitus postremoque fessus atque desperabundus eadem semper recidiva laborat, idem scilicet per se ipsum diffiniendo. Nam quid tantem aliud pretendit diffinitio sexta secundum mentem eius, quam quod quantitates incontinue proportionales sunt, quarum prime et tertie equemultiplices itemque secunde et quarte equemultiplices, si conferantur, eodem ordine, quo submultiplices proponuntur, incontinue proportionales sunt? Illud enim significat similitudo additionis aut minuitionis vel equationis, quam ipse insinuat. Undecime autem diffinitionis expositio quam ridicula sit, facile quispiam intelliget, qui proportionalitates irrationalis denominationis penitus exortas duplicare, triplicare aut quantumlibet multiplicare didicit. Porro principium decimi voluminis quomodo constabit, si sesquitertia proportio infinities etiam coacervata sesquialteram neque superare potest, neque etiam attingere? Quod si proportiones minoris equalitatis non | sunt de eodem genere quantitatis, quomodo altera ex alteris componi poterit? Si autem a genere quantitatis omnes prorsus excludende sunt proportiones, nulla omnino erit proportionum proportio, et ideo fabulas narrabunt, quicumque septimi physicorum regulas de velocitate motuum traditas subtiliter exponere conantur. Omnis etiam ferme calculationum in Italia celebratarum corruet argutia. Nugari videbuntur postremo quicunque de proportionum proportionibus disserere quidpiam tentant. Audire velim, quis primam undecimi demonstret, postquam secundam cum tredecima

78 (70)[b]

---

1) Bekanntlich irrt hier Regiomontan, da im echten Euklid der fragliche Satz die fünfte Petition bildet.

primi, cuius succursu prima undecimi fulcire debet, lineas suas in eadem planicie supponat, tales autem consideratas lineas, que in figura prima sunt, in eodem plano non nisi per secundam constare potest. Sed quid in elementis illis puerilibus diem terimus, cum in abstrusiori geometria principes etiam artis sese falso reprehendere videantur. MENELAUS quidem THEODOSIUM emendaturus suo se gladio iugulat. NICOLAUS autem CUSENSIS cardinalis, geometra ridiculus, ARCHIMEDISque emulus, quantas ostendabundus nostra tempestate invexit nugas? Quippe qui plurimos quadrabilis circuli modos edidit frivolos penitus et non nisi LULLIANIS quibusdam suasiunculis initentes.[1])

Paucula hec de lapsu mathematicarum perstrinxisse satis est, postquam ab initio de huiuscemodi rebus scribere haudquaquam instituerim. Ubi autem pari voto reciprocam inter nos benivolentiam agitare cepimus, non pigebit meditationes meas altiores forsitan amico detegere. Quod si conversationis formula placet, qua in Italia usus sum ad IOANNEM BLANCHINUM, senem in numeris exercitatissimum, aliosque viros gravissimos, libenter tecum eo colloquii genere disseram. Mos erat alternis invicem problematum tentamentis oblectari, quando | veras audire et reddere voces negabatur. 79 (71)[a] Hunc itaque iucundum et reciprocum acuendi ingenii stimulum, e quo suscipiamus animo, et quando per otium poteris, de me quoque per argutias suas periculum facito. Sic enim, nisi me fallit opinio, in plerisque exculpemus abstrusis rebus. Ut autem supputationis tollatur fastidium, satis erit circa unumquodque problema breviusculam ratiocinandi seriem adnotasse. Non enim ad unguem cuncta exprimi poterunt, presertim ubi malignitas linearum irrationalium obstiterit.

Ab astronomicis igitur principium fiat.

a. Anno presenti 1465, quando Sol in capite Arietis reperiebatur, per calculum vulgatum queritur, quantus fuerit arcus eclipticae inter locum eius verum et circulum equinoctialem comprehensus, quantaque fuerit ipsius Solis ab equinoctiali declinatio. Quod rides, vir humane? An mirum aut impossibile tibi videtur subiectum problematis? Tranquille velim accipias monimenta IOANNIS tui, qui profecto ex fundamentis Alfonsinis deducet, Solem tunc ab Arietis initio distare sex ferme gradibus, atque ideo declinatione non penitus caruisse. Cum autem illud spectet ad iudicia annua, quomodo vitabit errorem astrologus, si caput anni, radicem predictionis sue, prorsus ignoraverit?[2])

---

1) Das bezieht sich sicherlich auf die Arbeiten des RAIMUNDUS LULLUS *de quadratura et triangulatura circuli*, welche ich in der Münchner Hof- und Staatsbibliothek aufgefunden habe.

2) Siehe dieselbe Aufgabe oben (S. 295) in dem Briefe an JACOB VON SPEIER mit ähnlicher Bemerkung.

b. Si octavus Piscium gradus fuerit in cardine regionis, octavus autem Cancri horoscopii dignitatem tenuerit in genitura hominis cuiuspiam, utrum horum angulorum assimiliabis loco planete sextum Tauri gradum possidentis, qui scilicet in coitu aut opposito luminarium proximo genituram precedente ceteros potestatum altitudine vicit? Vocant Arabici animodar. Quod si ab huiuscemodi rebus incertis atque inextricabilibus abhorres, fragilem penitus iudiciariam ratus astrologiam, dic, queso, latitudinem habitationis, ubi octavo Cancri gradu exorto octavus Piscium in meridiano reperiatur. Id enim astronomie quadruvialis opificium est. Suppono autem exercitii gratia maximam Solis declinationem 24 graduum.

c. Urbs Roma longitudinem habet ab occidente graduum 35 et latitudinem ab equinoctiali 42 graduum, Erfordia vero longitudinem 27 graduum latitudinemque 51 (hos quidem numeros exempli gratia sumo, sive recti sint sive ambigui): quero, possitne idem ecliptice punctus reperiri simul in utriusque urbis orizonte. Et si possibile est, quis | sit ille. Quod si duo talia puncta offendi possint, que sint ille. Soluto autem problemate haud dubium erit, duas habitationes, immo innumeras tam longitudine quam latitudine diversas in ascendente quopiam communicare. Que res quantopere in iudiciis perspicienda sit, facile quisque decernet.[1]

79(71)[b]

d. Stella quedam fixa secundum longitudinem quidem zodiaci obtinens gradus 13 minutas 15 Geminorum, latitudinem autem borealem 8 graduum in quadam habitatione occidit cum gradibus 23 Geminorum: queritur latitudo illius habitationis.

e. Si duarum stellarum latitudine carentium altera quidem in fine decimi gradus Tauri fuerit; altera autem in fine vigesimi quinti eiusdem signi, tercia vero distet a prima quidem undecim, a secunda autem 17 gradibus: queritur latitudo huius tertie stelle ab ecliptica locusque eius verus per longitudinem zodiaci.[2]

f. Arcus ecliptice 20 graduum de quarta vernali equalis est ascensione sue recte: quero, principium talis arcus quantum distet a capite Arietis. Suppono exercitii gratia maximam Solis obliquationem 24 graduum. De obliqua autem ascensione silendum censeo, quoniam, si talis quepiam ponatur equalis suo arcui ecliptice, profundiore opus erit inquisitione.

g. Pono Saturnum in gradibus 10 Arietis, Iovem in gradibus 23 Leonis, Martem vero in gradibus 17 Virginis per medios motus suos. Quero, an unquam coniungentur illi tres, et si ita, in quanto tempore ab instanti situum positorum convenient. Quod si non est possibile omnes tres simul iungi, queritur, quando minimis distabunt intervallis. Motus autem Saturni

1) Auch diese Aufgabe siehe oben S. 294.

2) Eine ähnliche Aufgabe siehe S. 219, No. 1.

medius in die supponatur esse due prime minute et una secunda, Iovis 4′59″, Martis vero 31′27″, quemadmodum in tabulis statuuntur. De vero autem earum conventu ne verbum quidem fecero, quoniam labor immensus est.[1])

De astronomicis hactenus. Nunc ad geometricos ludos descendamus.

h. In triangulo *abc*, cuius angulus *b* rectus est, ab *a* vertice ad basim *bc* demissa est recta *ad* hoc pacto, ut, quod sub duabus *da* et *ac* continetur rectangulum, una cum quadrato linee *dc* equale sit quadrato *ac*: quero, quanta sit *dc* linea. Suppono autem *ab* latus 24 pedum, *bc* septem et *ac* 25 (Fig. 45).[2])

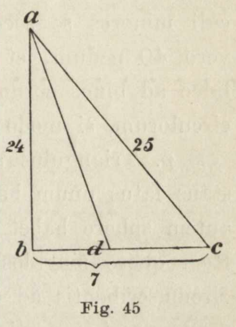


Fig. 45

i. Circulus quispiam diametrum habet 100 pedum, cui inscriptus est quadrangulus rectilineus habens latera in proportionibus horum numerorum 4 · 7 · 13 · 19: queritur, quanta sit area huius quadranguli. Item quero centrum gravitatis eiusdem | quadranguli. Voco autem centrum gravitatis cuiuspiam superficiei plane secundum ARCHIMEDEM illud punctum, ex quo suspensa superficies equedistat orizonti. De superficiebus enim naturalibus hec sunt accipienda, que ponderis capaces exstant.[3])

80(72)[a]

k. Duo circuli equales in eodem plano constitutie se secant, quorum utriusque diameter est 50 pedum, corda autem communis est 26 pedum: quero aream et angulum utriusque lunule. Item, quot huiuscemodi anguli lunares spatium repleant superficiale, si modo replere queant. Si enim non, queritur maxima multitudo talium angulorum a quatuor rectis deficientium.

l. Viginti quidam anguli lunares replent locum superficiale: quero, proportionem lunule ad ovalem, id est superficiem communem duobus circulis sese secantibus. Circulos autem ipsos pono equales.

m. Est quedam planicies ad orizontem et meridianam inclinata, cuius inclinatio ad orientem et septemtrionem vergit. Ad orizontem quidem inclinatio 40 gradus complectitur, ad meridianum autem 57: queritur longitudo umbre, quam proiicit scioterus sive gnomo aut stilus tripedalis ad planiciem ipsam perpendiculariter infixus, Sole habente altitudinem meridianam 60 graduum. Item quero angulum inclinationis huiuscemodi planiciei cum equinoctiali circulo, si qua est talis declinatio in regione, cuius latitudo est 51 graduum.

---

1) Siehe oben S. 295, No. 5.

2) In etwas anderer Form schon oben gegeben. Vergl. S. 262, No. 16.

3) Siehe oben S. 219, No. 3 und die Ausführung der Auflösung in dem Briefe an BIANCHINI vorn.

n. Habeo tres angulos rectilineos, quorum unus est 24 partium, qualium quatuor recti sunt 360, alius autem 35, et tertius 46. Ex iis constituo angulum solidum pyramidalem: quero proportionem anguli conici, qui dicto pyramidali angulo inscribi potest, ad angulum conicum eidem circumscriptibilem. Voco autem angulum conicum, qui superficie conica ambitur, que certe conica superficies nascitur, si linee recte alterum quidem terminum fixeris, alterum autem penes circuli circumferentiam rotaveris.

o. Sphera quedam habet diametrum sexaginta pedum, in quo duo circuli minores se secant, quarum alterius quidem diameter est 50, alterius vero 40 pedum, et sectio eorum communis 35: quero, quante sint recte linee ad binos corum polos desinentes. Item angulum inclinationis talium circulorum, si modo ad se invicem inclinati sunt.

p. Triangulus spheralis ex tribus circulorum magnorum arcubus constans latus unum habet 15, aliud 24, tertium vero 34 graduum; diameter autem sphere habet centum pedes. Quero aream huius trianguli spheralis. Item quero singulos eius angulos, item proportionem circuli convexi eum 80(72)[b] circumscribentis ad circulum convexum ei inscriptum. | Circulus autem convexus vocetur portio superficiei spherice, quam claudit circumferentia circuli plani.[1])

q. Queritur, quam proportionem habeat angulus icosedri ad angulum dodecedri.

r. Si aliquot anguli tetraedri replent locum corporalem, itemque aliquot anguli octoedri talem locum replent, queritur huius multitudinis angulorum ad illam proportio. Si vero neutri replent locum solidum, queritur utrobique maximus angulorum numerus minor octo rectis solidis spatium corporale opplentibus.

s. Trianguli cuiuspiam rectilinei area 70 pedes superficiales complectitur, cuius tria latera sunt in proportionibus horum numerorum 9 · 14 · 17: quero, quantum distent centra duorum circulorum, quorum alter quidem ipsi triangulo inscribitur, alter vero eidem circumscribitur.[2])

Si molestum non est, alia deinceps, utcumque incident, problemata subnectam.

t. Divisi lineam *ab* quinque pedum in *c* puncto secundum proportionem habentem medium et duo extrema, maiori parte facta *ac*, fecique lineam ipsam carastonem, dico stateram imparium brachiorum, cuius suspensorium ex *c* puncto divisionis. Ex punctis autem *a* et *b* suspendo duo corpora

1) Wohl die erste Aufgabe, welche den Inhalt eines sphärischen Dreiecks zu finden verlangt.

2) Sollte Regiomontan schon die Beziehung gekannt haben, dass diese Entfernung gleich $\sqrt{r(r-2\varrho)}$ ist?

regularia, icosedron videlicet ex puncto *b*, duodecedron autem ex puncto *a*, ita ut equiponderent, hoc est, linea *ab* equedistet orizonti. Quero proportionem duarum spherarum ipsis corporibus suspensis inscriptibilium.[1])

v. Triangulus *abc* tria latera habet cognita, *ab* quidem 15 pedum, *ac* autem undecim et *bc* 8; in cuius area punctus *d* accipiatur hac conditione, ut eo copulato tribus cuspidibus trianguli per tres lineas *da*, *db* et *dc*, duo anguli *adb* et *adc* fiant equales invicem, *da* vero linea 5 pedum longitudinem habeat: queritur longitudo utriusque linee *db* et *dc* (Fig. 46).

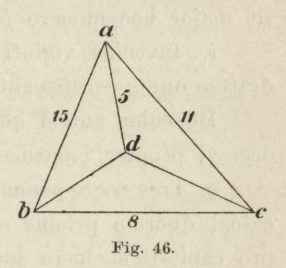
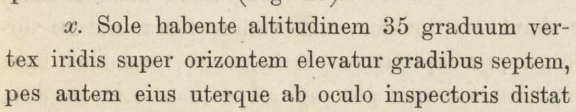


Fig. 46.



x. Sole habente altitudinem 35 graduum vertex iridis super orizontem elevatur gradibus septem, pes autem eius uterque ab oculo inspectoris distat passibus ducentis: queritur corda iridis et quanta sit ipsa portio respectu totius circumferentie.

y. Lumen Solis altitudinem habentis 37 graduum incidit per quandam fenestram circularem ad pavimentum quoddam equedistans orizonti. Est autem fenestra ipsa in pariete ad orizontem erecta, cuius quidem diameter sex pedes continet, centrum autem eius | a pavimento 28 pedibus extollitur. 81(73)[a] Quero, quanta sit superficies pavimenti illuminata. Item ad quantum Solis altitudinem talis incidentia radiosa fiat perfecte circularis, si modo possibilis est ita evenire. Quo autem investigatio simplicior atque idcirco facilior fiat, Solem instar puncti accipiamus.[2])

z. Esto speculum concavum ex sphera habente diametrum decem pedum, ponaturque oculus et visibile in eadem diametro talis sphere, oculus quidem duobus distans pedibus a centro speculi, visibile autem tribus, quod quidem visibile ab oculo cernatur per radium reflexum: queritur, quantum punctus reflexionis distet ab utroque termino diametri, in qua oculus cum visibili constituatur.

α. Pertica quedam decempedalis perpendiculariter suspenditur, cuius pes ab orizonte quattuor extollitur pedibus: queritur punctus orizontis, a quo pertica ipsa cernitur quam longissima hoc est sub maximo angulo. Verum, cum infiniti sunt talia puncta circumferentiam circuli occupantes, queritur, quantum distet unumquodque eorum a pede suspense pertice.[3])

β. Triangulo rectilineo proposito maximum quadratum inscribere.[4])

---

1) Auch diese Aufgabe ist schon oben S. 297, No. 14 dagewesen.

2) Auch diese beiden Aufgaben stehen schon oben S. 297, No. 13 und 13[a].

3) Die wahrscheinliche Lösung Regiomontan's sehe man bei Cantor, *Vorlesungen* II², S. 283.

4) Diese Aufgabe fehlt bei de Murr.

γ. Invenias tres numeros quadratos de medietate arithmetica, quorum minima sit maior numero 20000.

δ. Invenies tres numeros de medietate armonica usitata, in qua scilicet proportio maximi termini ad minimum est sicut differentie maximi et medii ad differentiam medii et minimi. Minimus autem huius medietatis terminus sit maior hoc numero 500000.

ε. Invenias viginti numeros quadratos, qui omnes simul iuncti quadratum unum constituant. Minima autem eorum sit maior hoc numero 30000.

De cubis autem quotlibet unum cubum constituentibus nihil proponere decrevi propter immensum fere laborem in ea investigatione numerorum.[1])

ζ. Tres socii ponunt simul 80 ducatos cum quibus lucrantur 20 ducatos, quorum primus recepit pro capitali suo et lucro 24, secundus item pro capitali et lucro suo 33, tertius vero pro capitali et lucro 43. Pecunia primi socii stat tres menses, secundi quinque, tertii vero undecim menses. Queritur, quanta fuit pecunia capitalis uniuscuiusque sociorum.[2])

η. Cordam octupedalem divisi in tres partes, quarum prima ad secundam, id est mediam, sonat semitonium minus, tertia autem ad predictam mediam sonat duos tonos cum semitonio vero: queritur, quanta fuerit unaqueque trium chordarum partialium. Semitonium quidem verum in natura exstat, quamvis ratione numerorum exprimi nequeat.

ϑ. Est canna quedam sive fistula cylindrica, cuius longitudo 12 pedum, latitudo autem sive etiam profunditas tribus palmis constat. Facturus sum 81(73)[b] aliam fistulam, que cum predicta consonantiam reddat | per quinque, qualem vocant diapente, cuius quidem fistule longitudo vigecupla sit latitudini sue: quero, quanta fiat longitudo illius secunde fistule, quantaque latitudo. Pedem constituo ex quatuor palmis geometricis, ne mensurarum alterna reductio lateat.[3])

ι. In statera sive bilance ponuntur duo pondera in proportione horum numerorum 35 et 32: quero quantitatem anguli acuti, quem continet perpendicularis sive alterum brachiorum cum ipso suspensorio.[4])

$\varkappa$. Pertica quedam erea equidistantibus superficiebus atque rectangulis continetur, cuius longitudo latitudini sue atque profunditati trigecupla est. Pondus autem totius virge est 24 librarum. Libram autem suppono cubum

---

1) Aus dieser Bemerkung dürfte wohl zu folgern erlaubt sein, dass Regiomontan auch keine allgemeinen Regeln für seine Aufgaben über Quadratsummen, die wieder Quadrate geben, u. dgl. besessen hat.

2) Auch diese Aufgabe ist schon oben S. 219, No. 7 Bianchini gestellt worden.

3) Auch diese und die vorhergehende Aufgabe stehen schon oben S. 296, No. 11 und 11[a].

4) Im Gegensatze zu der *Carasto* genannten Waage ist die *Statera* genannte die gleicharmige.

ereum, cuius latus tribus constat digitis. Queritur longitudo totius pertice, item ex quo puncto suspendi debeat, ut pertica ipsa cum suspensorio tertiam anguli recti partem complectatur.

λ. Duo sunt pondera colligata atque secundum situm equipollentia (Fig. 47), quorum alterum quidem recte, alterum vero oblique descenderet, si a communi ligatura solverentur. Via autem obliqua secundi ponderis cum orizonte angulum continet viginti graduum, qualium unus rectus est nonaginta. Quero proportionem talium ponderum. Equipollentia autem voco pondera, que sese vicissim a descensu prohibent. Ut si *bc* recto vice orizontis intelligatur, *ab* autem ad centrum mundi vergat, et *ac* cum *bc* angulum viginti graduum contineat, *d* pondus minus per *ab*, et *e* pondus maius per *ac* decensum petat abiecto communi vinculo.[1])

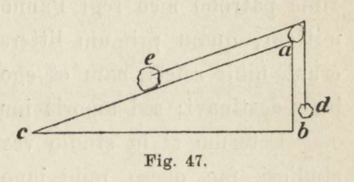


Fig. 47.

μ. Habeo speculum Archimedis annulare ex portione parabolica factum, cuius margo circularis maior quinque pedes continet, minor autem tres; profunditas vero speculi est bipedalis: quero locum ustionis itemque sagittam cum latere erecto. Voco autem profunditatem speculi partem axis, que inter centra duorum circulorum marginalium conducitur.

Sed iam ludendi finem facio. Ubi vero per litteras tuas, vir optime, certior fiam, quo in genere mathematicarum plus delecteris, tunc demum res serias aggrediamur. Plures quidem in arte algebrica questiunculas promerem, si te ex ea re voluptatis aliquid aucupaturum intelligerem. Hoc autem scire velim, habeasne in biblio|theca tua libris raris, ut audio, refertissima quicquam de equipollentia solidorum, unde ars illa subtilissima de re et censu ampliari possit! Sunt enim, qui se iactant ampliorem habere artem algebricam, quam in sex capitulis vulgatissimis traditur. Sed ipsi profecto ignorant, hanc artem ad cubos, census censuum atque ulteriores potentias extendi non posse, nisi prius geometria solidorum equipollentium edatur. Quemadmodum enim tria capitula composita superficierum equipollentiis inituntur, ita novum artis additamentum ex commutatione solidorum hauriatur necesse est. Hoc ideo commemini, ut labor meus ad id negocium assumptus in parte levetur. Facile enim erit inventis addere quidpiam.[2]) Et si hec geometria apud te non est, hoc solum munus ex- 82(74)[a]

1) Regiomontan scheint danach das Gesetz der schiefen Ebene gekannt zu haben.

2) Regiomontan hat sich also eingehend damit beschäftigt, eine Lösung der Gleichung dritten Grades zu finden, welche, geometrisch genommen, von der Zerlegung des Würfels auszugehen hat.

hibere poteris, ut inventarium bibliothecae illius ad me quam citius mittas, que plurimis abundat mathematicis codicibus, cuique, ut accepi, tu prefectus es.[1]) Hoc enim firmum erit pignus future consuetudinis nostre, pro qua re et ego missurum me polliceor opera, si que apud me fuerunt tibi placitura. Presertim si appetes illud novum de primo mobili quod nuperrime patrono meo regi Pannoniarum dedicavi, cuius quidem fructum ad te mittam, quam primum litteras tuas suscepero.[2]) Que si meis angustiores erunt, nihil refert, nam et ego ab initio litteram non codicillum ad te scribere destinavi; sed amoris impetus filum orationis longius produxit.

Ceterum si in studio vestro amplissimo alii sunt viri mathematicarum studiosi, fac, queso, mihi innotescant meamque in amicos beneficentiam experiantur. Suscita, queso, ingenia frigidiuscula, ut unanimi ac solerti inquisitione artes nostras dignissimas et propediem, nisi amplius suffulte fuerint, occubituras, quod fieri potest, erigamus. Mea quidem nihil refert in hoc negotio tam arduo tamque ampliter profuturo sive ministrum aut discipulum alius quispiam me substituat, sive hortatorem sectetur, modo reipublice litterarie aliquid commodi accedat. Et ne premia certationis desint, preter coronam quadruvialem, preter laudes uberrimas, quas coram 82(74)[b] primoribus viris impiger ego et sedulus preco decantare | solebo, munus etiam aureum, quam equidem exhibeo, decrevi. Cuicumque etenim sex certa, non dico que, prescriptorum problematum solventi pro singulis bona fide binos aureos hungaricos me daturum polliceor.

Vale feliciter (ex Nuremberga, die 4 Iulii anno Christi 1471).[3])

---

1) Es ist das die berühmte Amplonianische Bibliothek, welche zu jener Zeit schon im Besitze der Universität Erfurt sich befand. Ihr Bibliothekar war also damals, d. i. 1476, Christian Roder.

2) Da es durch diese Stelle, wie schon öfter hervorgehoben ist, nicht unwahrscheinlich wurde, dass schon 1471 die *Tabula primi mobilis* gedruckt vorgelegen, und, wenn Roder zustimmend geantwortet hätte, ihm ein Exemplar einer solchen Ausgabe zugekommen wäre, bat ich Herrn Professor Stange in Erfurt, den derzeitigen Vorsteher der Amploniana, nachzusehen, ob nicht ein Exemplar einer solchen Ausgabe sich etwa dort erhalten habe. Die freundlichst sofort angestellten Nachsuchungen haben auch hier leider ein negatives Ergebnis gehabt.

3) Bei de Murr steht das schon vor dem letzten Absatze, also nach *produxit* und vor *Ceterum si*.